О разсчетѣ вибрацій корабля, производимыхъ работой машины его.

Докладъ **проф. А. Н. Крылова,** почетнаго члена Союза.

Читанъ 17 декабря 1917 г.

§ 1. Если на кораблѣ установлена поршневая машина, у которой силы инерціи не вполнѣ уравновѣшены, то при работѣ этой машины происходятъ періодическія усилія, воспринимаемыя фундаментомъ ея;— передаваясь корпусу они и вызываютъ вибраціи корабля.

Дѣйствія этихъ усилій можно уподобить дѣйствію внѣшней періодической силы $Q = P\ Sin\ kt$, сосредоточенной въ нѣкоторой точкѣ, лежащей въ районѣ машины. Абсциссу этой точки обозначимъ черезъ c, всю длину корабля—черезъ l, „жесткость", т. е. произведеніе модуля упругости E на моментъ инерціи J площади связей въ сѣченіи, коего абсцисса x,—черезъ $f(x)$, массу приходящуюся на единицу длины при этомъ-же сѣченіи—черезъ $q(x)$. При такомъ обозначеніи задача объ опредѣленіи вибрацій корабля, равносильная задачѣ объ опредѣленіи вынужденныхъ колебаній балки перемѣннаго сѣченія съ свободными концами, ставится математически такъ: требуется найти такую функцію u, которая удовлетворяла бы: во-первыхъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + q(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

во-вторыхъ: граничнымъ условіямъ;

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ должно быть: } \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\ \text{при } x = l \text{ должно быть: } \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

при всякомъ значеніи времени t.

въ третьихъ: условіямъ сопряженія, которыя состоятъ въ томъ, что при $x = c$ величины $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны, величина же $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ должна претерпѣвать разрывъ непрерывности такъ, что разность

$$lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c-\varepsilon} - lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c+\varepsilon} = \frac{1}{f(c)}\, P\ Sin\ kt \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Начальныхъ условій, т.-е. относящихся къ мометну $t=0$, можно не разсматривать, такъ какъ вынужденныя колебанія отъ нихъ вообще не зависятъ, а также и потому, что при самомъ составленіи уравненія (1) отброшенъ членъ, представляющій вліяніе сопротивленія воды вибраціямъ корабля. Этимъ сопротивленіемъ свободныя колебанія, зависящія отъ начальныхъ условій, погашаются и остаются одни вынужденныя, поддерживаемыя дѣйствіемъ внѣшней силы; они то насъ и интересуютъ.

§ 2. Для рѣшенія поставленной задачи подраздѣлимъ корабль сѣченіемъ, коего абсцисса $x=c$, на два участка: 1-ый отъ $x=0$ до $x=c$ и 2-ой — отъ $x=c$ до $x=l$; причемъ абсциссы x будемъ считать отъ кормового перпендикуляра.

На первомъ участкѣ положимъ:

$$u=\varphi_1(x)\ Sin\ kt \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

На второмъ удобнѣе будетъ считать абсциссы x_1 отъ носового перпендикуляра, такъ что:

$$x_1=l-x$$

и тогда мы положимъ:

$$u=\varphi_2(x_1)\ Sin\ kt \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Весь вопросъ сводится къ нахожденію функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x_1)$

Подставляя выраженія (4) и (5) въ уравненіе (1) и полагая:

$$f_1(x_1)=f(l-x), \qquad q_1(x_1)=q(l-x),$$

видимъ, что φ_1 и φ_2 опредѣляются уравненіями:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\,\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\right]-k^2 q(x)\,.\,\varphi_1=0 \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\left[f_1(x_1)\,\frac{d^2\varphi_2}{dx_1^2}\right]-k^2 q_1(x_1)\,.\,\varphi_2=0 \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Оба эти уравненія обыкновенныя линейныя; значитъ, общій интегралъ каждаго изъ нихъ будетъ содержать постоянныя произвольныя линейно и, такъ какъ эти уравненія 4-го порядка, то въ каждомъ изъ общихъ интеграловъ будетъ по 4 постоянныхъ произвольныхъ.

Для опредѣленія этихъ 8 постоянныхъ послужатъ граничныя условія и условія сопряженія. Предполагая, что функція $f(x)$ не равна нулю ни при $x=0$, ни при $x=l$, нетрудно видѣть, что граничныя условія дадутъ слѣдующія четыре уравненія:

$$\varphi_1''(0)=0 \qquad \varphi_1'''(0)=0 \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

$$\varphi_2''(0)=0 \qquad \varphi_2'''(0)=0 \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

Условія же сопряженія будутъ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(c)=\varphi_2(l-c);\ \varphi_1'(c)=-\varphi_2'(l-c);\ \varphi_1''(c)=\varphi_2''(l-c);\\ \varphi_1'''(c)=-\varphi_2'''(l-c)+\frac{1}{f(c)}\,.\,P\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Знакъ минусъ передъ производными нечетнаго порядка функціи φ_2 стоитъ потому, что производныя надо брать по перемѣнной x, функція же φ_2 зависитъ отъ $x_1 = l - x$ и, значитъ, будетъ напримѣръ:

$$\frac{d}{dx}\varphi_2(x_1) = \frac{d}{dx_1}\varphi_2(x_1)\cdot\frac{dx_1}{dx} = -\frac{d}{dx_1}\varphi_2(x_1) = -\varphi_2{}'(x_1).$$

§ 3. Намѣтивъ общій ходъ рѣшенія, необходимо показать способъ производства на самомъ дѣлѣ всѣхъ требуемыхъ вычисленій, когда функціи $f(x)$ и $q(x)$ будутъ заданы, и притомъ, какъ для корабля обыкновенно бываетъ, графически или таблично.

Для этого вычисленія мы примѣнимъ изложенную въ нашемъ докладѣ: „О приближенномъ численномъ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій" методу Штермера, соотвѣтственно преобразовавъ уравненія нашей задачи и граничныя условія.

Возьмемъ функцію φ_1. Положивъ:

$$f(x)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = z_1,$$

получимъ изъ уравненія (6):

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = k^2 q(x).\varphi_1$$

Такимъ образомъ, уравненіе (3) замѣняется, обозначая производныя значками, системою:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1{}'' &= \frac{1}{f(x)}z_1\\ z_1{}'' &= k^2 q(x).\varphi_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Къ этой системѣ была-бы непосредственно примѣнима метода Штермера, если-бы были извѣстны начальныя, т. е. соотвѣтствующія $x=0$, значенія:

$$z_1,\ z_1{}',\ \varphi_1 \text{ и } \varphi_1{}'.$$

Между тѣмъ, при предположеніи, что $f(0)$ не равно нулю, мы будемъ имѣть на основаніи уравненія (8), что при $x=0$:

$$z_1 = 0 \text{ и } z_1{}' = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(11')$$

Что же касается $\varphi_1(0)$ и $\varphi_1{}'(0)$, то ихъ величины остаются произвольныя и, пока, ничѣмъ не обусловлены.

Сдѣлаемъ, поэтому,

$$\varphi_1(0) = A_1;\ \varphi_1{}'(0) = B_1$$

гдѣ A_1 и B_1 произвольныя постоянныя; тогда, на основаніи (11′), будетъ вообще:

$$\varphi_1(x) = A_1\,\omega_1(x) + B_1\,\psi_1(x)\quad\ldots\ldots\ldots(12)$$

гдѣ $\omega_1(x)$ и $\psi_1(x)$ суть два частныхъ рѣшенія системы (11). За другія