МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

Введение

Псевдодифференциальные операторы представляют собой весьма широкий круг операторов. Так, среди псевдодифференциальных операторов содержатся линейные дифференциальные операторы с частными производными и разностные операторы. Теория псевдодифференциальных операторов в настоящее время интенсивно развивается и получает все больше приложений в исследованиях отечественных и зарубежных математиков. При исследовании свойств псевдодифференциальных операторов используется преобразование Фурье обобщенных функций, рассмотренных ранее в учебно-методическом пособии «Дополнительные главы обобщенных функций».

Заметим, что если не требовать ограничения $m<-n$, то функция $p(x,\xi)$, вообще говоря, не будет абсолютно интегрируемой по переменной ξ. Однако, из неравенства (1.1) следует, что она при каждом x определяет функционал из S'. Поэтому мы можем при каждом фиксированном x определить обратное преобразование Фурье от функции $p(x,\xi)$. Обозначим через $k(x,z)$ обратное преобразование Фурье:

$$k(x,z)=F^{-1}_{\xi\to z}[p(x,\xi)]\ . \tag{1.6}$$

Это обратное преобразование Фурье понимается в обобщенном смысле. При этом функция $k(x,z)$ при каждом x будет медленно растущей функцией по переменной z. Покажем, что формула (1.5) остается справедливой и в этом случае.

Если мы условимся для любых $f\in S'$ и $u(x)\in S$ результат действия функционала $\overline{f}$ на функцию $u(x)$ записывать в виде интеграла

$$(\overline{f},u)=\int f(y)u(y)dy\,,$$

то получим:

$$\int k(x,x-y)u(y)dy=(\overline{k}(x-y),u(y))=\overline{(k(x-y),\overline{u}(y))}=$$

$$=\overline{(k(y+x),\overline{u}(-y))}=\overline{(k(y),\overline{u}(x-y))}=\frac{1}{(2\pi)^n}(p(x,\xi),\tilde{\overline{u}}(x-y))\,.$$

Так как $\tilde{\overline{u}}(x-y)=\int e^{-iy\xi}\overline{u}(x-y)dy=\int e^{-ix\xi}e^{iz\xi}\overline{u}(z)dz=e^{-ix\xi}\tilde{\overline{u}}(\xi)$, то, подставляя это равенство в предыдущее, будем иметь

$$\int k(x,x-y)u(y)dy=\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{(p(x,\xi)e^{ix\xi}\tilde{\overline{u}}(\xi))}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int p(x,\xi)e^{ix\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi=p(x,D)u(x).$$

Таким образом, доказана справедливость равенства (1.5) при произвольных x.

В качестве примера рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$p(x,\xi)=\begin{cases}a(x),\ если & \xi>0,\\ b(x),\ если & \xi<0.\end{cases} \tag{1.7}$$

Используя установленную ранее формулу для вычисления обратного преобразования Фурье от этой функции, получим

$$k(x,z)=\frac{a(x)+b(x)}{2}\delta(z)-\frac{a(x)-b(x)}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\right].$$

Отсюда

$$p(x,D)u(x)=\frac{a(x)+b(x)}{2}u(x)-\frac{a(x)-b(x)}{2\pi i}\int\frac{u(y)}{x-y}dy,$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Операторы такого вида называются *одномерными сингулярными операторами.*

Заметим, что среди всех функций $p(x,\xi)$ вида (1.7) можно выделить однородные функции по ξ нулевого порядка.

Функция $g(\xi)$ называется *положительно однородной* (или однородной), если $g(\lambda\xi)=\lambda^{\gamma}g(\xi)$ при $\forall\lambda>0$, число γ называется порядком однородности функции $g(\xi)$.

Для случая произвольного (>1) числа переменных x, псевдодифференциальные операторы, символы которых по переменной ξ являются положительно однородными, называются *многомерными сингулярными интегральными операторами.*

Псевдодифференциальные операторы часто возникают при решении различных задач уравнений в частных производных. Рассмотрим, например, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности: требуется при $t>0$ найти такое решение $v(t,x)$ уравнения теплопроводности $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, что $v(t,x)\to u(x)$ при $t\to+0$, где $u(x)$ – некоторая заданная функция.

Будем сначала предполагать, что $u(x)\in S$. Решим эту задачу с помощью преобразования Фурье по переменной x. Так как оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ после преобразования Фурье переходит в оператор умножения $-\xi^2$, то для $\tilde{v}(t,\xi)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\tilde{v}(t,\xi)}{\partial t}=-\xi^2\tilde{v}, \tag{1.8}$$

причем $\tilde{v}(0,\xi)=\tilde{u}(\xi)$.

Решением этого уравнения служит функция $\tilde{v}(t,\xi)=\tilde{u}(\xi)e^{-t\xi^2}$. Применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям этого равенства, получим

$$v(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}\tilde{u}(\xi)d\xi\ . \tag{1.9}$$

Таким образом, решение $v(t,x)$ получается с помощью применения к функции $u(x)$ псевдодифференциального оператора $e^{-t\xi^2}$. Используя формулу (1.5), мы можем записать решение в виде

$$v(t,x)=\int k(t,x-y)u(y)dy,$$

$$k(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-iz\xi}e^{-t\xi^2}d\xi.$$

Последний интеграл можно вычислить. Для этого заметим, что

$$-iz\xi-t\xi^2=-t(\xi+\frac{iz}{2t})^2-\frac{z^2}{4t},$$

следовательно, $k(t,z)=\dfrac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{2\pi}\displaystyle\int e^{-t(\xi+\frac{iz}{2t})^2}d\xi$.

Используя теорему Коши, мы можем заменить интегрирование по вещественной оси ξ на интегрирование по любой прямой, параллельной оси ξ на комплексной плоскости.

Если прямую выбрать так, что на ней $\eta=-\dfrac{iz}{2t}$, то получим, что

$$k(t,z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{2\pi}\int e^{-t\xi^2}d\xi.$$

Остается заметить, что

$$\int e^{-t\xi^2}d\xi=\frac{1}{\sqrt{t}}\int e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Отсюда, $k(t,z)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{z^2}{4t}}$, т.е.

$$v(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}u(y)dy\ . \tag{1.10}$$

Последняя формула называется *формулой Пуассона*. Заметим, что рассуждения, с помощью которых мы получили формулу (1.10), требуют дальнейшего обоснования. Например, мы без доказательства заменили функцию $\dfrac{\widetilde{\partial v}}{\partial t}$ на $\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ и считали, что при каждом ξ функцию $\tilde{v}(t,\xi)$ можно рассматривать как классическое решение уравнения (1.8). Все эти моменты легко обосновать, используя конкретные функции $v(t,x)$. Можно показать, что все рассуждения верны не только для $u(x)\in S$, но и для функции $u(x)$, которая является непрерывной и ограниченной функцией на всем пространстве S.

§ 2. Псевдодифференциальные уравнения с символами класса S^m

1. Свойства ядер операторов с символами класса S^m. Обозначим через S^m множество таких бесконечно дифференцируемых функций $p(x,\xi)$, определенных на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, что для любых мультииндексов α и β

$$\left|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\ p_{(\rho)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha+\beta|}p}{\partial\xi^{\alpha}\partial x^{\beta}}, \tag{2.1}$$

где $C_{\alpha,\rho}$ – постоянные, которые зависят только от α, β и p. Положим

$$k(x,z) = F_{\xi\to z}^{-1}\left[p(x,\xi)\right], \tag{2.2}$$

где F^{-1} – обратное преобразование Фурье. При $m<-n$ функция $k(x,z)$ непрерывна и ограничена, при $m\ge -n$ преобразование Фурье понимается в смысле теории обобщенных функций и $k(x,z)$ по переменным z будет обобщенной функцией из S'. В дальнейшем $k(x,z)$ будем называть ядром оператора $p(x,D)$, а функцию $p(x,\xi)$ – символом ядра $k(x,z)$.

Множество всех ядер, символы которых принадлежат S^m, обозначим через K^m.

Если $k(x,z)\in K^m$, то для любых мультииндексов α,β,γ

$$z^{\alpha}D_x^{\gamma}D_z^{\beta}k(x,z)\in K^{m-|\alpha|+|\beta|}. \qquad 2.3)$$

Действительно, используя определение и свойства преобразования Фурье обобщенных функций, легко установить, что левая часть в (2.3) есть ядро с символом $(-1)z^{|\alpha|}D_{\xi}^{\alpha}D_x^{\gamma}\left(\xi^{\beta}p(x,\xi)\right)$, причем из (2.1) следует, что этот символ принадлежит $S^{m-|\alpha|+|\beta|}$. Поэтому $z^{\alpha}D_x^{\gamma}D_z^{\beta}k(x,z)$ при $|\alpha|>m+|\beta|+n$ будет непрерывной и ограниченной функцией, следовательно, $D_x^{\gamma}D_z^{\beta}k(x,z)$ на $\mathbb{R}^n\times\left(\mathbb{R}^n\setminus 0\right)$ для любых γ и β есть непрерывная функция, причем

$$\left|D_x^{\gamma}D_z^{\beta}k(x,z)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}|z|^{-|\alpha|} \tag{2.4}$$

при $|\alpha|>m+|\beta|+n$. Отсюда можно сделать вывод, что $k(x,z)$ на $\mathbb{R}^n\times\left(\mathbb{R}^n\setminus 0\right)$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

2. Псевдодифференциальные операторы в пространстве B^{∞}. Обозначим через B^{∞} совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, что $f(x)$ и все производные $f^{(\alpha)}(x)$ ограничены. Определим на B^{∞} оператор $p(x,D)$ по формуле

$$p(x,D)f = \int k(x,x-y)f(y)dy. \tag{2.5}$$

Если ядро $k(x,z)$ – обобщенное, то интегралу в (2.5) еще нужно придать смысл. Для этого заметим, что если $f(y)=0$ в окрестности точки x, то интеграл в (2.5) сходится, что видно из оценок (2.4). С другой стороны, для функций $f(y)$ из S интеграл (2.5) мы уже определили в §1. Остается заметить, что любую функцию $f(y)\in B^{\infty}$ можно представить в виде суммы $f(y)=f_1(y)+f_2(y)$, где $f_1(y)=0$ при $|x-y|<1$, $f_2\in S$. Для этого достаточно положить

$$f_1(y)=\varphi(y-x)f(y),\ f_2(y)=(1-\varphi(y-x))f(y),$$

где $\varphi(y)$ – такая основная функция, что $\varphi(y)=1$ при $|y|<1$. Теперь можем определить интеграл в (2.5), положив

$$\int k(x,x-y)f(y)dy=\int k(x,x-y)f_1(y)dy+\int k(x,x-y)f_2(y)dy.$$

Легко видеть, что результат не зависит от способа представления $f(y)$ в виде суммы функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ с указанными свойствами. Аналогичным образом интеграл в (2.5) определяется для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(y)$ степенного роста.

В пространстве B^{∞} можно ввести понятие сходящихся последовательностей. Будем говорить, что последовательность $f_v(y)\in B^{\infty}$ сходится при $v\to\infty$ к $f(x)\in B^{\infty}$, если $f_v^{(\alpha)}(x)\to f_{(x)}^{(\alpha)}$ равномерно для любых α (в частности, равномерно сходится сама последовательность $f_v(y)$).

Лемма 2.1. Если $p(x,\xi)\in S^m$, то оператор $p(x,D)$ непрерывен в пространстве B^{∞}.

Доказательство. Если $m<-n$, то утверждение леммы следует из того, что $D_x^{\gamma}k$ при любых γ есть непрерывная ограниченная функция и

$$\left|D_x^{\gamma}k(x,z)\right|\le C(1+|z|)^{-n-1}, \tag{2.6}$$

что вытекает из (2.4). Действительно, в этом случае

$$p(x,D)f(x)=\int k(x,z)f(x-z)dz \tag{2.7}$$

и для доказательства ограниченности производных от $p(x,D)f(x)$ достаточно продифференцировать под знаком интеграла в (2.7), после чего интеграл оценивается с помощью (2.6). Если $m\ge -n$, то $m\le r-n-1$, где r – целое положительное число, и $p(x,\xi)$ можно представить в виде суммы

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le r}\xi^{\alpha}g_{\alpha}(x,\xi),\ g_{\alpha}(x,\xi)\in S^{-n-1}.$$

Тогда

$$p(x,D)f=\sum_{|\alpha|\le r}g_{\alpha}(x,D)D_x^{\alpha}f(x).$$

Так как операторы D_x^{α} и $g_{\alpha}(x,D)$ непрерывны в B^{∞}, то отсюда получаем, что и $p(x,D)$ непрерывен в B^{∞}.