ŋqdqaeY bƎ dedƎbYɜe d ɛɑɑbɔʎ ɟqdqYqʎè

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКА

Часть 1.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Практикум для вузов

Составители:
Е.С. Рембеза,
В.И. Кукуев

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

ŋqdqaeY bƎ dedƎbYɜe d ɛɑɑbɔʎ ɟqdqYqʎè

ŋqdpayeY bŁ depŁbYse d esɑbɔʎ ɜqdpYqyè

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
М-1.1

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

Цель работы: изучение видов погрешностей, их оценок и методик расчета. Изучение основных приёмов линейных измерений на простейших измерительных приборах.

Приборы и принадлежности: линейка с ценой деления 1 мм, штангенциркуль с ценой деления 0,05 мм, микрометр с ценой деления 0,01 мм, набор измеряемых тел.

ВВЕДЕНИЕ

1. Погрешности измерений и их типы

Под **измерением** понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения разделяют на **прямые** и **косвенные**. **Прямыми** называются измерения, результат которых отсчитывается непосредственно по шкале измерительного прибора (измерения длины линейкой, времени секундомером, температуры термометром и т.д.). В большинстве случаев физические величины вычисляются по формулам, выведенным из физических законов, с использованием результатов прямых измерений. Такие измерения называются **косвенными** (измерение объема прямоугольного параллелепипеда, плотности тела, ускорения свободного падения и др.).

Любые измерения всегда производятся с какими-то погрешностями, связанными с ограниченной точностью измерительных приборов, неправильным выбором, и погрешностью метода измерений, физиологией экспериментатора, особенностями измеряемых объектов, изменением условий измерения и т.д. Поэтому в задачу измерения входит нахождение не только самой величины, но и погрешности измерения, т.е. интервала, в котором вероятнее всего находится истинное значение измеряемой величины. Например, при измерении отрезка времени t секундомером с ценой деления 0,2 с можно сказать, что истинное значение его находится в интервале от $t_1 = (t - 0{,}2)$ с до $t_2 = (t + 0{,}2)$ с. Таким образом, измеряемая величина всегда содержит в себе некоторую погрешность $\Delta X = \mu - X$, где μ и X – соответственно истинное и измеренное значения исследуемой величины. Величина ΔX называется **абсолютной погрешностью** (ошибкой) измерения, а выра-

ŋqdpayeY bŁ depŁbYse d esɑbɔʎ ɜqdpYqyè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

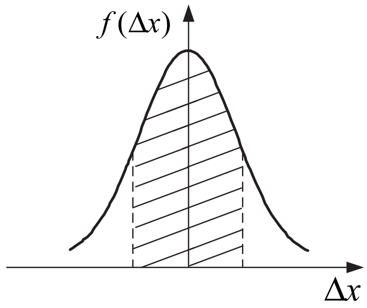

Рис. 1

Частные производные по переменным d и h будут равны

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi dh}{2}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Таким образом, формула для определения абсолютной систематической погрешности при измерении объема цилиндра имеет следующий вид

$$\partial V = \sqrt{\left(\frac{\pi dh}{2}\partial d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4}\partial h\right)^2} = V\sqrt{\left(\frac{2\partial d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{h}\right)^2}$$

,

где ∂d и ∂h – приборные ошибки при измерении диаметра и высоты цилиндра.

3. Оценка случайной погрешности. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Для подавляющего большинства простых измерений достаточно хорошо выполняется так называемый нормальный закон случайных погрешностей (**закон Гаусса)**, выведенный из следующих эмпирических положений:

1) погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений;

2) при большом числе измерений погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто,

3) чем больше величина случайной погрешности, тем меньше вероятность ее появления.

График нормального закона распределения Гаусса представлен на рис.1. Уравнение кривой имеет вид

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2}$$

где $f(\Delta x)$ – функция распределения случайных ошибок (погрешностей), характеризующая вероятность появления ошибки Δx, σ – средняя квадратичная ошибка.

Величина σ не является случайной величиной и характеризует процесс измерений. Если условия измерений не изменяются, то σ остается постоянной величиной. Квадрат этой величины называют **дисперсией измерений.** Чем меньше дисперсия, тем меньше разброс отдельных значений и тем выше точность измерений. Как показывает теория, дисперсия равна:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 . \tag{3}$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

ђqdpyeҰ bЕ deрЕpҰзe d ecaбcҰ ЗqdpҰqyè

Из рис. 2 и формулы (3) видно, что дисперсия характеризует случайный разброс данного ряда измерений относительно истинного значения. При ограниченном числе наблюдений приближенной оценкой дисперсии может служить так называемая *выборочная дисперсия*, вычисленная по некоторому «выбранному» конечному числу измерений:

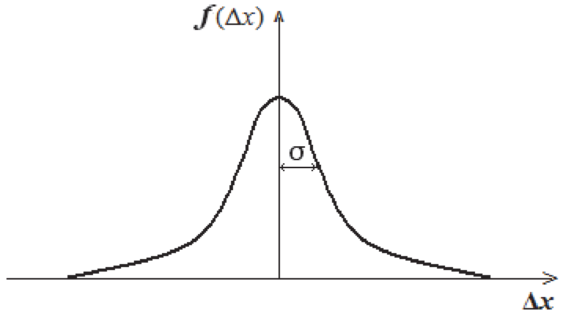

Рис. 2

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2 . \qquad (4)$$

Точное значение средней квадратичной ошибки σ, как и истинное значение измеряемой величины, неизвестно. Существует так называемая статистическая оценка этого параметра, в соответствии с которой средняя квадратичная ошибка равняется средней квадратичной ошибке среднего арифметического $S_{\bar{x}}$. Величина $S_{\bar{x}}$ определяется по формуле

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \qquad (5)$$

где x_i – результат *i*-го измерения; $\bar{x}$ – среднее арифметическое полученных значений; n – число измерений.

Чем больше число измерений, тем меньше $S_{\bar{x}}$ и тем больше оно приближается к σ. Если истинное значение измеряемой величины μ, ее среднее арифметическое значение, полученное в результате измерений $\bar{x}$, а случайная абсолютная погрешность Δx, то результат измерений запишется в виде $\mu = \bar{x} \pm \Delta x$.

Интервал значений от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$, в который попадает истинное значение измеряемой величины μ, называется **доверительным интервалом.** Поскольку Δx является случайной величиной, то истинное значение попадает в доверительный интервал с вероятностью α, которая называется **доверительной вероятностью,** или **надежностью** измерений. Эта величина численно равна площади заштрихованной криволинейной трапеции (см. рис. 1).

Все это справедливо для достаточно большого числа измерений, когда $S_{\bar{x}}$ близка к σ. Для отыскания доверительного интервала и доверительной вероятности при небольшом числе измерений, с которым мы имеем дело в ходе выполнения лабораторных работ, используется **распределение вероятностей Стьюдента.** Это распределение вероятностей случайной величины $t_{\alpha,n}$, называемой **коэффициентом Стьюдента**, дает значение довери-

ђqdpyeҰ bЕ deрЕpҰзe d ecaбcҰ ЗqdpҰqyè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

тельного интервала Δx в долях средней квадратичной ошибки среднего арифметического $S_{\bar{x}}$

$$t_{\alpha,n} = \frac{\Delta x}{S_{\bar{x}}}. \qquad (6)$$

Распределение вероятностей этой величины не зависит от σ^2, а существенно зависит от числа опытов n. С увеличением числа опытов n распределение Стьюдента стремится к распределению Гаусса.

Функция распределения табулирована (табл. 1). Значение коэффициента Стьюдента находится на пересечении строки, соответствующей числу измерений n, и столбца, соответствующего доверительной вероятности α.

Таблица 1

n	α				n	α			
	0,8	0,9	0,95	0,98		0,8	0,9	0,95	0,98
3	1,9	2,9	4,3	7,0	6	1,5	2,0	2,6	3,4
4	1,6	2,4	3,2	4,5	7	1,4	1,9	2,4	3,1
5	1,5	2,1	2,8	3,7	8	1,4	1,9	2,4	3,9

Пользуясь данными таблицы, можно:

1) определить доверительный интервал, задаваясь определенной вероятностью;

2) выбрать доверительный интервал и определить доверительную вероятность.

При косвенных измерениях среднюю квадратичную ошибку среднего арифметического значения функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ вычисляют по формуле

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} S_{\bar{x}_i}\right)^2}. \qquad (7)$$

Доверительный интервал и доверительная вероятность определяются так же, как и в случае прямых измерений.

4. Оценка суммарной погрешности измерений. Запись окончательного результата

Суммарную погрешность результата измерений величины X будем определять, как среднее квадратичное значение систематической и случайной погрешностей

$$\Delta_{\Sigma} x = \sqrt{\delta x^2 + \Delta x^2}, \qquad (8)$$

где δx – приборная погрешность, Δx – случайная погрешность.

В качестве X может быть, как непосредственно, так и косвенно измеряемая величина.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè