ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 473, № 6, с. 635–639

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2017 г. А. А. Дуюнова[1,*], В. В. Лычагин[1,2], С. Н. Тычков[1]

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 26.12.2016 г.

Поступило 13.01.2017 г.

В работе даётся классификация уравнений состояний для вязкой жидкости (или газа), описываемой системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса. Классификация основывается на анализе симметрий, допускаемых системой.

DOI: 10.7868/S0869565217120015

Рассмотрим течения вязких жидкостей в трёхмерном пространстве, описываемые следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}),$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad (1)$$

$$T\rho\frac{Ds}{Dt} = k\Delta T + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – поле скоростей жидкости, p, ρ, s, T – давление, плотность, удельная энтропия и температура соответственно, а тензор

$$\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

есть тензор вязких напряжений среды, и

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} f$$

есть материальная производная.

Предполагается, что коэффициенты теплопроводности k и вязкости ζ и η постоянны.

Отметим, что первое уравнение системы (1) – это трёхмерное уравнение Навье–Стокса, второе – уравнение непрерывности, а третье – уравнение теплопроводности [1].

Прежде всего заметим, что система (1) не замкнута. Для её замыкания необходимы ещё два соотношения, которые могут быть получены из термодинамических свойств среды.

Как правило, из-за недостатка уравнений состояния жидких сред при решении задач гидродинамики для замыкания системы уравнений используются различные упрощения и гипотезы (несжимаемость, изоэнтропичность), применение которых не всегда корректно. Подход, используемый в данной работе, заключается в применении аппарата дифференциальной геометрии к классификации уравнений состояний с точки зрения допускаемых ими симметрий, действующих в пространстве термодинамических переменных. Полученные таким образом уравнения состояния можно использовать для аппроксимации экспериментальных данных и отыскания симметрий, допускаемых реальной жидкой средой, которые также можно использовать для редукции системы уравнений Навье–Стокса.

Изучим алгебры симметрий системы уравнений Навье–Стокса в их зависимости от термодинамических состояний. Алгебра симметрий состоит из чисто геометрической и термодинамической частей. Геометрическая часть алгебры симметрий представлена группой движений, преобразованиями Галилея и сдвигами вдоль оси времени. Термодинамическая часть напрямую зависит от симметрий термодинамических состояний.

Рассмотрим классификацию термодинамических состояний и соответствующих алгебр Ли для случаев, когда термодинамические состояния допускают одномерную или двумерную алгебры симметрий.

Подробный обзор уравнений термодинамических состояний, полученных экспериментальными методами, можно найти в [5].

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва
[2] University of Tromso, Norway
*E-mail: duyunova_anna@mail.ru

ŋdqdyeY bƎ dədƎbYɜe d ɛɑɔdɔʎ ɹqdqdʎqʎè

Для описания термодинамических состояний рассмотрим пятимерное контактное многообразие $\mathbb{R}^5$, снабжённое координатами $(p, \rho, s, T, \varepsilon)$ и контактной 1-формой

$$\theta = d\varepsilon - Tds - \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

Уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$, в котором удельная внутренняя энергия ε является функцией плотности ρ и удельной энтропии s, задаёт двумерное лежандрово многообразие L в $\mathbb{R}^5$:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, s), \quad T = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}, \quad p = \rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho},$$

являющееся интегральным многообразием контактной формы θ.

Иначе говоря, на многообразии L выполняется первый закон термодинамики [2]:

$$\theta|_L = 0.$$

В общем случае под термодинамическим состоянием понимается 2-мерное лежандрово многообразие $L \subset \mathbb{R}^5$.

Заметим также, что удельная внутренняя энергия ε не входит в число неизвестных функций в системе (1). Чтобы исключить её из описания термодинамического состояния, рассмотрим проекцию $\phi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $\phi\colon (p, \rho, s, T, \varepsilon) \mapsto (p, \rho, s, T)$. Ограничение отображения ϕ на поверхность состояния L является локальным диффеоморфизмом на образ $\bar{L} = \phi(L)$, а поверхность $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ – погружённым лагранжевым многообразием в четырёхмерном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^4$ со структурной формой

$$\Omega = ds \wedge dT + \rho^{-2}d\rho \wedge dp.$$

Отметим, что удельную внутреннюю энергию ε можно восстановить с точностью до константы, зная лагранжево многообразие $\bar{L}$.

Таким образом, термодинамическое состояние можно определить как лагранжево многообразие в симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^4, \Omega)$.

Двумерная поверхность $\bar{L}$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} F(p, \rho, s, T) &= 0, \\ G(p, \rho, s, T) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

а условие того, что поверхность $\bar{L}$ лагранжева, может быть выражено следующим образом:

$$[F, G] = 0 \text{ на } \bar{L}, \tag{3}$$

где $[F, G]$ – скобка Пуассона относительно симплектической формы Ω, т.е.

$$[F, G]\Omega^2 = dF \wedge dG \wedge \Omega.$$

В координатах (p, ρ, s, T) эта скобка имеет вид

$$[F, G] = \rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial G}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial G}{\partial s}.$$

Системой уравнений Навье–Стокса называется система уравнений (1), дополненная лагранжевой поверхностью $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ или двумя уравнениями состояния (2), удовлетворяющими соотношению (3).

Заметим, что условие $[F, G] = 0 \bmod \{F = 0, G = 0\}$ эквивалентно условию интегрируемости системы уравнений в частных производных

$$F\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}, \rho, s, \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right) = 0,$$

$$G\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}, \rho, s, \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right) = 0.$$

Таким образом, система уравнений Навье–Стокса – это система (1), дополненная уравнениями состояния (2), где функции F и G удовлетворяют дополнительному соотношению (3).

Геометрически мы представляем эту систему следующим образом. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^4$ – семимерное расслоение:

$$\pi\colon (t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, \rho, s, p, T) \mapsto (t, x_1, x_2, x_3).$$

Тогда система (2) определяет уравнение нулевого порядка $\mathscr{E}_0 \subset J^0\pi$.

Обозначим $\mathscr{E}_1 \subset J^1\pi$ систему порядка ≤ 1, полученную первым продолжением системы $\mathscr{E}_0$ и четвёртым уравнением (непрерывности) системы (1).

Система дифференциальных уравнений $\mathscr{E}_2 \subset J^2\pi$ порядка ≤ 2 состоит из первого продолжения системы $\mathscr{E}_1$ и всех уравнений второго порядка системы (1).

Для порядков $k \ge 3$ определим $\mathscr{E}_k \subset J^k\pi$ как $(k-2)$-е продолжение системы $\mathscr{E}_2$.

Симметрии системы уравнений Навье–Стокса являются точечными (см. [6]), т.е. порождаются векторными полями X в пространстве джетов $J^0\pi$ такими, что их второе продолжение $X^{(2)}$ касается подмногообразия $\mathscr{E}_2 \subset J^2\pi$.

Для описания алгебры Ли симметрий системы Навье–Стокса рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$, порождённую векторными полями на пространстве $J^0\pi$:

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_{x_2}, \quad X_3 = \partial_{x_3},$$
$$X_4 = -x_2\,\partial_{x_1} + x_1\,\partial_{x_2} - u_2\,\partial_{u_1} + u_1\,\partial_{u_2},$$
$$X_5 = -x_3\,\partial_{x_2} + x_2\,\partial_{x_3} - u_3\,\partial_{u_2} + u_2\,\partial_{u_3},$$
$$X_6 = -x_1\,\partial_{x_3} + x_3\,\partial_{x_1} - u_1\,\partial_{u_3} + u_3\,\partial_{u_1},$$
$$X_7 = t\,\partial_{x_1} + \partial_{u_1}, \quad X_8 = t\,\partial_{x_2} + \partial_{u_2}, \quad X_9 = t\,\partial_{x_3} + \partial_{u_3},$$
$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = \partial_s, \quad X_{12} = \partial_p,$$
$$X_{13} = x_1\,\partial_{x_1} + x_2\,\partial_{x_2} + x_3\,\partial_{x_3} + u_1\,\partial_{u_1} +$$
$$+ u_2\,\partial_{u_2} + u_3\,\partial_{u_3} - 2\rho\,\partial_\rho + 2T\,\partial_T,$$
$$X_{14} = t\,\partial_t - u_1\,\partial_{u_1} - u_2\,\partial_{u_2} - u_3\,\partial_{u_3} +$$
$$+ \rho\,\partial_\rho - p\,\partial_p - 2T\,\partial_T.$$

Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли, порождённую векторными полями

$$Y_1 = \partial_s, \quad Y_2 = \partial_p, \quad Y_3 = \rho\,\partial_\rho - T\,\partial_T,$$
$$Y_4 = p\,\partial_p + T\,\partial_T.$$

Пусть $\vartheta : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ – гомоморфизм алгебр Ли, где

$$\vartheta(X) = X(\rho)\partial_\rho + X(s)\partial_s + X(p)\partial_p + X(T)\partial_T$$

и $X \in \mathfrak{g}$.

Ядро гомоморфизма ϑ – это идеал $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, порождённый векторными полями $X_1, ..., X_{10}$.

Пусть также $\mathfrak{h}_{\mathfrak{t}}$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{h}$, которая сохраняет термодинамические состояния (2). Тогда верна следующая

Теорема 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathfrak{shm}}$ симметрий системы уравнений Навье–Стокса совпадает с прообразом*

$$\vartheta^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{t}}).$$

Отметим, что обычно уравнениями состояния пренебрегают, и векторные поля вида $f(t)\partial_p$, где f – произвольная функция, рассматриваются как симметрии уравнений Навье–Стокса. В этом случае алгебра симметрий неполной системы Навье–Стокса является бесконечномерной.

Также в случае уравнений состояния общего вида алгебра $\mathfrak{h}_{\mathfrak{t}} = 0$ и алгебра симметрий совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$.

Классифицируем уравнения термодинамических состояний (ср. [3]), т.е. лагранжевы многообразия $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$, в зависимости от алгебры симметрий $\mathfrak{h}_{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{h}$. Для этого рассмотрим одно- и двумерную подалгебры Ли в алгебре $\mathfrak{h}$ и опишем лагранжевы многообразия, инвариантные относительно этих подалгебр. Рассмотрим только случаи одно- и двумерных подалгебр, поскольку для алгебр Ли размерности 3 физически осмысленных инвариантных уравнений состояний нет.

Начнём с размерности 1, $\dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{t}} = 1$.

Пусть вектор $Z = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i Y_i$ задаёт базис в этой алгебре.

Поверхность состояния $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ лагранжева, т.е. $\Omega|_{\bar{L}} = 0$, и векторное поле Z касается поверхности $\bar{L}$ тогда и только тогда, когда дифференциальная 1-форма

$$\iota_Z \Omega = \frac{\lambda_3}{\rho}dp - \frac{\lambda_4 p + \lambda_2}{\rho^2}d\rho + (\lambda_3 - \lambda_4)Tds + \lambda_1 dT$$

обращается в ноль на $\bar{L}$.

Иначе говоря, поверхность $\bar{L}$ является решением следующей системы уравнений:

$$\Omega|_{\bar{L}} = 0,$$
$$(\iota_Z \Omega)|_{\bar{L}} = 0.$$

Соотношения

$$T = \frac{\partial \varepsilon(\rho, s)}{\partial s}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon(\rho, s)}{\partial \rho}$$

и последнее уравнение $(\iota_Z\Omega)|_{\bar{L}} = 0$ позволяют получить два дифференциальных уравнения на удельную внутреннюю энергию $\varepsilon(\rho, s)$:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2} + \lambda_3 \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s \partial \rho} + (\lambda_3 - \lambda_4)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = 0,$$
$$\lambda_3 \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s \partial \rho} + (2\lambda_3 - \lambda_4)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{\lambda_2}{\rho^2} = 0. \qquad (4)$$

Можно проверить, что скобка Майера [4] этих двух уравнений обращается в ноль, следовательно, система формально интегрируема. Решая систему (4) для случая общих значений коэффициентов λ, находим выражения для давления и температуры:

$$T = \rho^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} F', \quad p = \rho^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \left(\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3} - 1 \right) F - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} F' \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_4}, \qquad (5)$$

где

$$F = F\left(s - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \rho \right)$$

есть произвольная гладкая функция.

Особые случаи для коэффициентов λ перечислены ниже.