

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# **ТЕОРИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Направление подготовки  
01.03.02 – Прикладная математика и информатика  
Профиль подготовки «Математическое моделирование»

Бакалавриат

Ставрополь  
2017

УДК 519.86 (075.8)  
ББК 22.18 я73  
Т 33

Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
Северо-Кавказского  
федерального университета

Т 33     **Теория систем массового обслуживания:** учебное пособие / сост.:  
А. В. Шапошников, В. В. Бережной, А. М. Лягин, А. А. Плетухина. –  
Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2017. – 134 с.

Пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования. В учебном пособии рассматривается теория обслуживания заявок в системах массового обслуживания, излагаются методы вывода аналитических выражений для вероятностно-временных показателей эффективности систем массового обслуживания при различных дисциплинах обслуживания в отсутствие и наличии приоритетов.

Пособие одобрено на заседании кафедры прикладной математики и математического моделирования от 3 февраля 2017 г., протокол № 7.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика».

УДК 519.86 (075.8)  
ББК 22.18 я73

*Составители:*

канд. техн. наук, доцент **А. В. Шапошников**,  
канд. техн. наук, доцент **В. В. Бережной**,  
канд. техн. наук, доцент **А. М. Лягин**,  
канд. физ.-мат. наук, доцент **А. А. Плетухина**

*Рецензенты:*

канд. техн. наук, доцент **Д. Н. Резеньков** (СтГАУ),  
канд. техн. наук, доцент, доцент **С. В. Аникуев** (СтГАУ)

© ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский  
федеральный университет», 2017

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	6
<b>1. Потоки событий и их характеристики .....</b>	<b>8</b>
1.1. Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания .....	8
1.1.1. Определение случайного процесса и его характеристики .....	8
1.1.2. Основные понятия теории массового обслуживания .....	11
1.1.3. Понятие Марковского случайного процесса .....	12
1.1.4. Уравнение Колмогорова для вероятностей состояний Марковских систем с непрерывным временем и дискретными состояниями .....	15
1.1.5. Метод описания состояний Марковских систем с непрерывным временем .....	21
1.2. Потоки событий .....	26
1.2.1. Классификация потоков событий .....	26
1.2.2. Характеристики потоков событий .....	28
1.2.3. Потоки Эрланга .....	30
Примеры решения задач .....	35
Выводы .....	37
Вопросы для самопроверки .....	38
Список литературы к первой главе .....	39
<b>2. Системы массового обслуживания с беспriorитетной дисциплиной обслуживания .....</b>	<b>41</b>
2.1. Система массового обслуживания с отказами .....	41
2.1.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами .....	41
2.1.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами .....	44
2.2. Системы массового обслуживания с ожиданиями .....	51
2.2.1. Принципы обслуживания заявок в системах массового обслуживания с ожиданиями .....	51
2.2.2. Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью заявок, ожидающих обслуживания .....	52
2.2.3. Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью заявок, ожидающих обслуживания .....	57

2.3. Многоканальные системы массового обслуживания с ожиданиями.....	61
2.3.1. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограниченным накопителем очереди .....	61
2.3.2. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченным накопителем очереди .....	65
2.4. Многоканальные системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания .....	68
2.4.1. Многоканальная системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания и неограниченным накопителем очереди .....	68
2.4.2. Многоканальная система массового обслуживания с ограниченным временем ожидания и ограниченным накопителем очереди.....	71
2.5. Системы массового обслуживания с ограниченным числом источников заявок.....	75
2.5.1. Система массового обслуживания с ограниченным числом источников заявок и неограниченной очередью .....	75
2.5.2. Система массового обслуживания с ограниченным числом источников заявок и отказами в обслуживании.....	78
Примеры решения задач .....	80
Выводы .....	93
Вопросы для самопроверки.....	93
Список литературы ко второй главе .....	93
<b>3. Системы массового обслуживания с приоритетной дисциплиной обслуживания.....</b>	<b>95</b>
3.1. Закон сохранения работы в системах массового обслуживания с приоритетами .....	95
3.1.1. Свойства систем массового обслуживания с приоритетами .....	96
3.1.2. Среднее время ожидания обслуживания заявок в системах массового обслуживания с приоритетами .....	96
3.2. Обслуживание заявок с фиксированными приоритетами .....	101
3.2.1. Среднее время ожидания обслуживания заявок с фиксированными относительными приоритетами.....	101
3.2.2. Среднее время обслуживания заявок с фиксированными абсолютными приоритетами .....	104

3.3. Обслуживание заявок с меняющимися во времени приоритетами.....	107
3.3.1. Среднее время ожидания обслуживания заявок с линейно изменяющимися относительными приоритетами в одноканальных системах массового обслуживания .....	107
3.3.2. Среднее время ожидания обслуживания заявок с нелинейно меняющимися относительными приоритетами в одноканальных системах массового обслуживания .....	114
Выводы .....	116
Вопросы для самопроверки.....	116
Список литературы к третьей главе.....	116
<b>4. Применение теории массового обслуживания в телекоммуникационных системах.....</b>	<b>117</b>
4.1. Предмет и задачи теории телетрафика.....	117
4.2. Моделирование телекоммуникационных систем .....	121
4.3. Нагрузка и её виды .....	123
4.4. Характеристики элементов вторичных сетей связи.....	125
4.4.1. Длительность обслуживания сообщений в сети связи и поток их освобождений .....	125
4.4.2. Основные характеристики узлов коммутации и ветвей сети связи .....	127
Примеры решения задач .....	129
Выводы .....	131
Вопросы для самопроверки.....	131
Список литературы к четвертой главе .....	132
Заключение .....	133

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие по дисциплине «Теория систем массового обслуживания» подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом профессионального образования.

*Задачей* курса является обучение студентов современным методам и средствам моделирования систем массового обслуживания (СМО), основанных на использовании передового математического аппарата и доступных средств разработки моделей систем массового обслуживания.

Дисциплина «Теория массового обслуживания» рассматривает теоретические и практические вопросы проектирования и моделирования систем массового обслуживания, является прикладной дисциплиной, производной знаний, полученных от изучения базовых курсов «Теория вероятностей и математическая статистика», «Информатика», «Алгоритмизация и программирование» и др. и включает в себя чрезвычайно широкий спектр методов и задач, связанных с необходимостью моделирования технических систем и процессов, протекающих в системах массового обслуживания, классификации способов представления моделей систем, формализации объектов, процессов, явлений и реализации их моделей с использованием компьютерной техники.

Знания и навыки, получаемые студентами в результате изучения дисциплины, необходимы для подготовки к изучению следующих дисциплин: «Исследование операций и системный анализ», «Случайные процессы и их приложения», а также для дисциплин, связанных с моделированием систем.

Освоение дисциплины «Теория систем массового обслуживания» позволит будущему бакалавру по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» полноценно осуществлять свою профессиональную деятельность, в частности, обладать следующими профессиональными и общекультурными компетенциями:

### ***Общепрофессиональные компетенции (ОК)***

Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ОПК-1).

### **Профессиональные компетенции (ПК)**

Способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям (ПК-1).

Студенты, овладевшие указанными компетенциями, должны:

- **знать:** характеристики потоков заявок на обслуживание в СМО, методы расчёта показателей эффективности различных СМО, методы расчета числа обслуживающих каналов в СМО с различной дисциплиной обслуживания заявок, особенности расчёта пропускной способности СМО по заданной нагрузке и оперативности обслуживания заявок при приоритетных дисциплинах обслуживания;
- **уметь:** применять методику анализа показателей эффективности СМО с беспriorитетной и приоритетной дисциплинами обслуживания заявок;
- **владеть:** методикой выбора структуры СМО в зависимости от показателей эффективности СМО, используемой приоритетной дисциплины обслуживания заявок, метода ограничения доступа заявок на обслуживание.

Пособие представляет собой материалы по организации лекционных занятий по дисциплине «Теория систем массового обслуживания» для бакалавров направления «Прикладная математика и информатика».