Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 1 **МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

№ 6 · 2015 · ноябрь – декабрь

Издательство Московского университета

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

ŋqdpyaY bE debEdYae b eacpca Jqdpyqè

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

Short notes

To buy separate issues of "Moscow University Mathematics Bulletin" and "Moscow University Mechanics Bulletin" or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

Математика

УДК 512.761

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТИПА $\mathcal{A}_k$ НА КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЯХ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ, КВАЗИСТЕПЕНИ ИЛИ МУЛЬТИСТЕПЕНИ

Е. А. Асташов[1]

В работе изучается вопрос о том, какие особенности типа $\mathcal{A}_k$ могут иметь алгебраические кривые (соответственно поверхности) фиксированной степени, квазистепени или мультистепени в $\mathbb{C}^2$ (соответственно в $\mathbb{C}^3$).

Ключевые слова: классификация особенностей, особенности алгебраических кривых и поверхностей, особенности типа $\mathcal{A}_k$.

In this paper we study $\mathcal{A}_k$-singularities that can exist on curves (surfaces, respectively) of fixed degree, quasi-degree, or multi-degree in $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}^3$, respectively).

Key words: classification of singularities, singularities of algebraic curves and surfaces, $\mathcal{A}_k$-singularities.

1. Введение. Существует общая задача описания алгебраических многообразий с особенностями заданного типа и о связи степени многообразий с параметрами этих особенностей (см., например, [1]).

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что росток гиперповерхности $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ в точке a имеет особенность типа $\mathcal{A}_k$, если в окрестности этой точки в $\mathbb{C}^n$ существуют локальные координаты $z_1, \ldots, z_n$, которые центрированы в точке a и в которых функция f имеет вид $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{k+1} + z_2^2 + \ldots + z_n^2$.

В настоящей работе мы изучаем особенности типа $\mathcal{A}_k$ на плоских кривых в $\mathbb{C}^2$ и на гиперповерхностях в $\mathbb{C}^n$ фиксированной степени, квазистепени или мультистепени. Обозначим через $k_n(d)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}^n$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$ в какой-либо точке. В работе [2] доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Имеет место неравенство* $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}} \frac{k_2(d)}{d^2} \leqslant \frac{3}{4}$.

Утверждение 2. *Имеет место неравенство* $\underline{\lim\limits_{d\to\infty}} \frac{k_2(d)}{d^2} \geqslant \frac{15}{28}$.

Из этих утверждений, в частности, следует, что $k_2(d) \sim d^2$ при $d \to \infty$. Утверждение 2 может быть обобщено на случай произвольной размерности, а именно справедливо

Утверждение 3. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеет место неравенство*

$$\underline{\lim_{d\to\infty}} \frac{k_n(d)}{d^n} \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Это неравенство следует из примера 1 работы [3].

В работе [4] результат утверждения 2 улучшается и обобщается на случай гиперповерхностей в комплексном пространстве произвольной размерности следующим образом.

Утверждение 4. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеет место неравенство*

$$\underline{\lim_{d\to\infty}} \frac{k_n(d)}{d^n} \geqslant \frac{112}{209} \cdot \frac{1}{2^{n-2}}.$$

В настоящей работе мы получаем верхнюю оценку для случая $n = 3$ (теорема 1). Кроме того, для случаев $n = 2$ и $n = 3$ нижняя оценка обобщается на случай кривых и поверхностей фиксированной квазистепени (теоремы 2 и 3) или мультистепени (теорема 4).

2. Верхняя оценка для случая поверхностей в $\mathbb{C}^3$. Очевидно, что для всех $n \geqslant 2$ и $d \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $k_n(d) \leqslant d^n$. Для $n = 3$ эту оценку можно улучшить следующим образом.

[1] *Асташов Евгений Александрович* — асп. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: astea@yandex.ru.

Теорема 1. *Имеет место неравенство* $\varlimsup\limits_{d\to\infty} \frac{k_3(d)}{d^3} \leqslant \frac{2}{3}$.

Доказательство. Пусть поверхность $\mathcal{C} = \{f(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, заданная алгебраическим уравнением степени $\deg f = d$, имеет особенность типа $\mathcal{A}_k$ в некоторой точке. Рассмотрим проективное замыкание этой поверхности в $\mathbb{CP}^3$; пусть оно задано в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ уравнением $F(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = 0$, где F — однородный многочлен степени d (считаем, что аффинное пространство $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{CP}^3$ задано условием $x_0 \neq 0$).

Пусть $U(0) \subset \mathbb{C}$ — окрестность нуля в $\mathbb{C}$, $\{F_\lambda \,|\, \lambda \in U(0)\}$ — аналитическое по λ семейство шевелений отображения F общего вида (т.е. таких, что множества $\{F_\lambda = 0\}$ при $\lambda \in U(0) \setminus \{0\}$ являются гладкими многообразиями) степени d. Существует такое число $\delta > 0$, что при любом $\lambda \in U(0) \setminus \{0\}$ пересечение поверхности $\{F_\lambda(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = 0\}$ с шаром $B_\delta(0)$ радиуса δ и с центром в начале координат диффеоморфно слою Милнора особенности типа $\mathcal{A}_k$, т.е. пересечению поверхности $\{f(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon\}$ при малом $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с шаром $B_\delta(0)$ (более подробно об этом см. в [5, гл. IV, §2.1]).

Поверхность $\{F_\lambda = 0\}$ в свою очередь диффеоморфна поверхности $B = \{x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$. В самом деле, все неособые поверхности степени d в $\mathbb{CP}^3$ диффеоморфны поверхности B, поскольку в пространстве алгебраических кривых степени d в $\mathbb{CP}^3$ множество кривых с особенностями имеет положительную коразмерность. Аффинная часть поверхности B, т.е. поверхность $A = B \cap \mathbb{C}^3$, задается уравнением $x_1^d + x_2^d + x_3^d = 1$.

Лемма 1. *Отрицательный индекс инерции формы пересечений в группе гомологий* $H_2(A; \mathbb{R})$ *эквивалентен* $\frac{2}{3}d^3 + O(d^2)$ *при* $d \to \infty$.

Доказательство. *Длиной* монома $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ назовем величину $l(x^\alpha y^\beta z^\gamma) = \frac{\alpha+\beta+\gamma+3}{d}$. По теореме 2 работы [6] отрицательный индекс формы пересечений в группе гомологий равен количеству мономов $\{x^\alpha y^\beta z^\gamma \,|\, 0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant d-2,\ l(x^\alpha y^\beta z^\gamma) \notin \mathbb{Z},\ [l(x^\alpha y^\beta z^\gamma)]$ нечетно$\}$. Здесь и далее $[\cdot]$ означает целую часть числа. Другими словами, этот индекс равен сумме по всем $m \in \mathbb{N}$, для которых число $\frac{m+3}{d}$ нецелое и имеет нечетную целую часть, количеств разбиений числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых α, β, γ, каждое из которых не превосходит $d-2$ (такие разбиения будем называть *хорошими*, а все остальные — *плохими*). При этом разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Если $0 \leqslant m \leqslant d-2$, то все разбиения числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых: $m = \alpha + \beta + \gamma$ удовлетворяют условию $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant d-2$. Таких разбиений, очевидно, всего C^2_{m+2}. При этом число $[\frac{m+3}{d}]$ будет нечетным (а именно равным единице) только при $m = d-2$. Так что для $0 \leqslant m \leqslant d-2$ хороших разбиений будет $C^2_{d-2+2} = \frac{d(d-1)}{2}$.

Если $d-1 \leqslant m \leqslant 2d-3$, то среди разбиений числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых: $m = \alpha + \beta + \gamma$ (которых всего C^2_{m+2}) помимо хороших разбиений будут еще плохие, в которых одно из слагаемых больше числа $d-2$. (Если в разбиении хотя бы два слагаемых больше числа $d-2$, то $m > 2d-3$.) Число разбиений, в которых первое слагаемое есть $d+k$, $k \geqslant -1$, равняется $m-d-k+1$ (столько способов разбить число $m-(d+k)$ в сумму двух целых неотрицательных слагаемых). Значит, число разбиений $m = \alpha + \beta + \gamma$, в которых $d-1 \leqslant \alpha \leqslant m$, равно

$$\sum_{k=-1}^{m-d} (m-d-k+1) = \frac{(m-d+2)(m-d+1)}{2}.$$

По стольку же разбиений $m = \alpha + \beta + \gamma$ получим в случае $d-1 \leqslant \beta \leqslant m$ и в случае $d-1 \leqslant \gamma \leqslant m$. Таким образом, для $d-1 \leqslant m \leqslant 2d-3$ существует $\frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2}$ плохих разбиений и

$$C^2_{m+2} - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2}$$

хороших разбиений.

Отметим, что при $2d-3 \leqslant m \leqslant 3d-6$ число $\left[\frac{m+3}{d}\right]$ будет четным (точнее, оно будет равняться двум), а при $m > 3d-6$ хотя бы одно слагаемое в разбиении $m = \alpha + \beta + \gamma$ будет больше числа $d-2$. Поэтому для чисел $m \geqslant 2d-3$ хороших разбиений нет вовсе. В то же время при $d-1 \leqslant m \leqslant 2d-4$ число $\left[\frac{m+3}{d}\right]$ всегда будет нечетным (точнее, оно будет равняться единице). Общее число интересующих нас разбиений, таким образом, равно

$$\frac{d(d-1)}{2} + \sum_{m=d-1}^{2d-4} \left[\frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2}\right] = \frac{2}{3}d^3 + O(d^2), \quad d \to \infty.$$

Лемма доказана.