

Вестник Московского университета

Серия 1 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Издательство Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

№ 6 · 2015 · ноябрь – декабрь

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Асташов Е. А. Об особенностях типа \mathcal{A}_k на кривых и поверхностях заданной степени, квазистепени или мультистепени	3
Лимонов М. А. Обобщенные сепаранты дифференциальных многочленов	9
Бдырыс А. Ж. Асимптотика кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами	14
Ивлев Ф. А. Оценка расстояния между двумя телами внутри n -мерного единичного куба и шара	23

Механика

Киселёв А. Б., Мищенко А. В. Использование упругопластических моделей для описания экспериментальных данных по откольному разрушению при плоском соударении пластин	29
Кугушев Е. И., Никонов В. И. Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного плоского твердого тела и материальной точки	37

Краткие сообщения

Липатов С. Ю. Функции, не меняющие типы минимальных заполнений	42
Шнурников И. Н. Реализуемость особых уровней функций Морса объединением геодезических	45
Салова Т. В. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем	48
Рублёва О. В. Кривизна Риччи взвешенного дерева	52
Маслов С. А. Электрические механизмы усиления завихренности в воронке торнадо	54
Белоглазкин А. Н., Шкадов В. Я. Влияние касательных и нормальных сил на процесс формирования волн при совместном течении пленки жидкости и потока газа	58
Лемак С. С. К вопросу о формировании позиционных стратегий дифференциальной игры в методе экстремального прицеливания Н.Н. Красовского	61
Академик Анатолий Тимофеевич Фоменко	66
Указатель статей и материалов, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика” в 2015 году	69

CONTENTS

Mathematics

<i>Astashov E. A.</i> Types of singularities on curves and surfaces of given degree, quasi-degree or multi-degree	3
<i>Limonov M. A.</i> Generalized separants of differential polynomials	9
<i>Ydyrys A. Zh.</i> Asymptotic of multiple trigonometric series with monotone coefficients	14
<i>Ivlev F. A.</i> Estimate of distance between two bodies inside an n -dimensional unit cube and a ball	23

Mechanics

<i>Kiselev A. B. and Mishchenko A. V.</i> Elastoplastic models to describe experimental data on the spallation fracture under impact of plates	29
<i>Kugushev E. I. and Nikonov V. I.</i> An estimate for the number of relative equilibria in the motion of a plane rigid body and a material point under mutual gravitation	37

Short notes

<i>Lipatov S. Yu.</i> Functions not changing types of minimal fillings	42
<i>Shnurnikov I. N.</i> Realizability of particular levels of Morse functions by means of a union of geodesics	45
<i>Salova T. V.</i> Efficiency of perturbations in the class of linear Hamiltonian systems	48
<i>Rubleva O. V.</i> Ricci curvature of a weighted tree	52
<i>Maslov S. A.</i> Electric mechanism of vorticity amplification in the tornado funnel	54
<i>Beloglazkin A. N. and Shkadov V. Ya.</i> Effect of tangential and normal forces on the wave formation in the flow of a liquid film and a gas	58
<i>Lemak S. S.</i> Formation of positional strategies of a differential game in Krasovskii's method of extremal aiming	61
<i>Academician Anatolii Timofeevich Fomenko</i>	66
<i>Index of papers and materials published in the journal "Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika" during 2015 year</i>	69

To buy separate issues of "Moscow University Mathematics Bulletin" and "Moscow University Mechanics Bulletin" or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

Математика

УДК 512.761

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТИПА \mathcal{A}_k НА КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЯХ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ, КВАЗИСТЕПЕНИ ИЛИ МУЛЬТИСТЕПЕНИЕ. А. Астахов¹

В работе изучается вопрос о том, какие особенности типа \mathcal{A}_k могут иметь алгебраические кривые (соответственно поверхности) фиксированной степени, квазистепени или мультистепени в \mathbb{C}^2 (соответственно в \mathbb{C}^3).

Ключевые слова: классификация особенностей, особенности алгебраических кривых и поверхностей, особенности типа \mathcal{A}_k .

In this paper we study \mathcal{A}_k -singularities that can exist on curves (surfaces, respectively) of fixed degree, quasi-degree, or multi-degree in \mathbb{C}^2 (\mathbb{C}^3 , respectively).

Key words: classification of singularities, singularities of algebraic curves and surfaces, \mathcal{A}_k -singularities.

1. Введение. Существует общая задача описания алгебраических многообразий с особенностями заданного типа и о связи степени многообразий с параметрами этих особенностей (см., например, [1]).

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что росток гиперповерхности $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ в точке a имеет особенность типа \mathcal{A}_k , если в окрестности этой точки в \mathbb{C}^n существуют локальные координаты z_1, \dots, z_n , которые центрированы в точке a и в которых функция f имеет вид $f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{k+1} + z_2^2 + \dots + z_n^2$.

В настоящей работе мы изучаем особенности типа \mathcal{A}_k на плоских кривых в \mathbb{C}^2 и на гиперповерхностях в \mathbb{C}^n фиксированной степени, квазистепени или мультистепени. Обозначим через $k_n(d)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность степени d в \mathbb{C}^n с особенностью типа \mathcal{A}_k в какой-либо точке. В работе [2] доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Имеет место неравенство $\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{k_2(d)}{d^2} \leq \frac{3}{4}$.*

Утверждение 2. *Имеет место неравенство $\underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{k_2(d)}{d^2} \geq \frac{15}{28}$.*

Из этих утверждений, в частности, следует, что $k_2(d) \sim d^2$ при $d \rightarrow \infty$. Утверждение 2 может быть обобщено на случай произвольной размерности, а именно справедливо

Утверждение 3. *Для любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство*

$$\underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{k_n(d)}{d^n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Это неравенство следует из примера 1 работы [3].

В работе [4] результат утверждения 2 улучшается и обобщается на случай гиперповерхностей в комплексном пространстве произвольной размерности следующим образом.

Утверждение 4. *Для любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство*

$$\underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{k_n(d)}{d^n} \geq \frac{112}{209} \cdot \frac{1}{2^{n-2}}.$$

В настоящей работе мы получаем верхнюю оценку для случая $n = 3$ (теорема 1). Кроме того, для случаев $n = 2$ и $n = 3$ нижняя оценка обобщается на случай кривых и поверхностей фиксированной квазистепени (теоремы 2 и 3) или мультистепени (теорема 4).

2. Верхняя оценка для случая поверхностей в \mathbb{C}^3 . Очевидно, что для всех $n \geq 2$ и $d \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $k_n(d) \leq d^n$. Для $n = 3$ эту оценку можно улучшить следующим образом.

¹ Астахов Евгений Александрович — асп. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: ast-
ea@yandex.ru.

Теорема 1. *Имеет место неравенство $\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{k_3(d)}{d^3} \leq \frac{2}{3}$.*

Доказательство. Пусть поверхность $C = \{f(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, заданная алгебраическим уравнением степени $\deg f = d$, имеет особенность типа A_k в некоторой точке. Рассмотрим проективное замыкание этой поверхности в \mathbb{CP}^3 ; пусть оно задано в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ уравнением $F(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = 0$, где F — однородный многочлен степени d (считаем, что аффинное пространство $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{CP}^3$ задано условием $x_0 \neq 0$).

Пусть $U(0) \subset \mathbb{C}$ — окрестность нуля в \mathbb{C} , $\{F_\lambda | \lambda \in U(0)\}$ — аналитическое по λ семейство шевелений отображения F общего вида (т.е. таких, что множества $\{F_\lambda = 0\}$ при $\lambda \in U(0) \setminus \{0\}$ являются гладкими многообразиями) степени d . Существует такое число $\delta > 0$, что при любом $\lambda \in U(0) \setminus \{0\}$ пересечение поверхности $\{F_\lambda(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = 0\}$ с шаром $B_\delta(0)$ радиуса δ и с центром в начале координат диффеоморфно слою Милнора особенности типа A_k , т.е. пересечению поверхности $\{f(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon\}$ при малом $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с шаром $B_\delta(0)$ (более подробно об этом см. в [5, гл. IV, §2.1]).

Поверхность $\{F_\lambda = 0\}$ в свою очередь диффеоморфна поверхности $B = \{x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$. В самом деле, все неособые поверхности степени d в \mathbb{CP}^3 диффеоморфны поверхности B , поскольку в пространстве алгебраических кривых степени d в \mathbb{CP}^3 множество кривых с особенностями имеет положительную коразмерность. Аффинная часть поверхности B , т.е. поверхность $A = B \cap \mathbb{C}^3$, задается уравнением $x_1^d + x_2^d + x_3^d = 1$.

Лемма 1. *Отрицательный индекс инерции формы пересечений в группе гомологий $H_2(A; \mathbb{R})$ эквивалентен $\frac{2}{3}d^3 + O(d^2)$ при $d \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Длиной монома $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ назовем величину $l(x^\alpha y^\beta z^\gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma + 3}{d}$. По теореме 2 работы [6] отрицательный индекс формы пересечений в группе гомологий равен количеству мономов $\{x^\alpha y^\beta z^\gamma | 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq d-2, l(x^\alpha y^\beta z^\gamma) \notin \mathbb{Z}, [l(x^\alpha y^\beta z^\gamma)] \text{ нечетно}\}$. Здесь и далее $[\cdot]$ означает целую часть числа. Другими словами, этот индекс равен сумме по всем $m \in \mathbb{N}$, для которых число $\frac{m+3}{d}$ нецелое и имеет нечетную целую часть, количеств разбиений числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых α, β, γ , каждое из которых не превосходит $d-2$ (такие разбиения будем называть *хорошими*, а все остальные — *плохими*). При этом разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Если $0 \leq m \leq d-2$, то все разбиения числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых: $m = \alpha + \beta + \gamma$ удовлетворяют условию $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq d-2$. Таких разбиений, очевидно, всего C_{m+2}^2 . При этом число $[\frac{m+3}{d}]$ будет нечетным (а именно равным единице) только при $m = d-2$. Так что для $0 \leq m \leq d-2$ хороших разбиений будет $C_{d-2+2}^2 = \frac{d(d-1)}{2}$.

Если $d-1 \leq m \leq 2d-3$, то среди разбиений числа m в сумму трех целых неотрицательных слагаемых: $m = \alpha + \beta + \gamma$ (которых всего C_{m+2}^2) помимо хороших разбиений будут еще плохие, в которых одно из слагаемых больше числа $d-2$. (Если в разбиении хотя бы два слагаемых больше числа $d-2$, то $m > 2d-3$.) Число разбиений, в которых первое слагаемое есть $d+k$, $k \geq -1$, равняется $m - d - k + 1$ (столько способов разбить число $m - (d+k)$ в сумму двух целых неотрицательных слагаемых). Значит, число разбиений $m = \alpha + \beta + \gamma$, в которых $d-1 \leq \alpha \leq m$, равно

$$\sum_{k=-1}^{m-d} (m - d - k + 1) = \frac{(m - d + 2)(m - d + 1)}{2}.$$

По столько же разбиений $m = \alpha + \beta + \gamma$ получим в случае $d-1 \leq \beta \leq m$ и в случае $d-1 \leq \gamma \leq m$. Таким образом, для $d-1 \leq m \leq 2d-3$ существует $\frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2}$ плохих разбиений и

$$C_{m+2}^2 - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2}$$

хороших разбиений.

Отметим, что при $2d-3 \leq m \leq 3d-6$ число $[\frac{m+3}{d}]$ будет четным (точнее, оно будет равняться двум), а при $m > 3d-6$ хотя бы одно слагаемое в разбиении $m = \alpha + \beta + \gamma$ будет больше числа $d-2$. Поэтому для чисел $m \geq 2d-3$ хороших разбиений нет вовсе. В то же время при $d-1 \leq m \leq 2d-4$ число $[\frac{m+3}{d}]$ всегда будет нечетным (точнее, оно будет равняться единице). Общее число интересующих нас разбиений, таким образом, равно

$$\frac{d(d-1)}{2} + \sum_{m=d-1}^{2d-4} \left[\frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{3(m-d+2)(m-d+1)}{2} \right] = \frac{2}{3}d^3 + O(d^2), \quad d \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.