

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Н. В. Тимофеева

Линейная алгебра. Современная алгебра

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальности
Математика и компьютерные науки*

Ярославль 2012

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73
Т41

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года*

Рецензенты:
кафедра алгебры ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
В. Г. Шендеровский,
доцент кафедры общематематических
и естественно-научных дисциплин ЯФ МФЮА

Тимофеева, Н. В. Линейная алгебра. Современная
Т 41 **алгебра:** учебное пособие / Н. В. Тимофеева; Яросл. гос. ун-т
им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2012. – 114 с.

Пособие содержит материалы по теории конечномерных векторных пространств и линейных отображений. Также делаются отступления в другие области современной алгебры, где применяются аналогичные методы доказательств или реализуются похожие ситуации.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010200.62 Математика и компьютерные науки (дисциплина "Линейная алгебра", цикл Б 3) очной формы обучения.

ISBN 978-5-8397-0871-6

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова,
2012

Оглавление

Введение	7
Глава 1. Векторные пространства. Подпространства. Фильтрации	10
1.1 Определения	10
1.1.1 Векторное пространство	10
1.1.2 R -модуль*	11
1.1.3 Действие группы на множестве*	12
1.2 Подпространство. Задание подпространств. Линейная оболочка	12
1.2.1 Подпространство	12
1.2.2 Подмодуль*	13
1.2.3 Линейные комбинации и линейные оболочки	14
1.3 Линейная зависимость	15
1.3.1 Понятие и простейшие свойства	15
1.3.2 Линейная зависимость (алгоритм)	16
1.4 Базисы и фильтрации	16
1.4.1 Базис	16
1.4.2 Фильтрация векторного пространства	17
1.4.3 Базис – фильтрация – базис	18
1.4.4 Фильтрации группы: класс разрешимых групп*	20
1.5 Инвариантность размерности	21
1.5.1 Два базиса в одном пространстве	21
1.5.2 Различные фильтрации	22
1.5.3 Монотонность размерности	22
1.6 Суммы и пересечения подпространств	23
1.6.1 Сумма подпространств	23
1.6.2 Размерность суммы подпространств	23
1.6.3 Прямая сумма подпространств	24
1.6.4 Базис суммы линейных оболочек (алгоритм)	25
1.6.5 Базис пересечения линейных оболочек (алгоритм)	26
1.6.6 Сумма и пересечение подпространств, заданных уравнениями	27
1.7 Смена базисов и координаты	29
1.7.1 Матрица перехода	29

1.7.2 Изменение координат при смене базиса	30
Глава 2. Морфизмы	31
2.1 Гомоморфизмы (линейные отображения) векторных пространств	31
2.1.1 Гомоморфизм и его задание	31
2.1.2 Изоморфизм	32
2.1.3 Критерии инъективности и изоморфности линейного отображения	33
2.1.4 Базис как изоморфизм	34
2.1.5 Классификация векторных пространств	35
2.1.6 Еще одна теорема классификации: циклические группы*	35
2.1.7 Пространство гомоморфизмов	37
2.1.8 Композиция гомоморфизмов. Коммутативные диаграммы	37
2.2 Матричные представления отображений.	
Построение отображений с помощью базисов и фильтраций	38
2.2.1 Матрица линейного отображения в паре базисов	38
2.2.2 Базис и размерность пространства гомоморфизмов	39
2.2.3 Смена базисов векторного пространства как его автоморфизм	40
2.2.4 Преобразование матрицы линейного отображения при смене базисов	40
2.3 Ядро, образ и теорема о гомоморфизме	41
2.3.1 Ядро, образ и их вычисление	41
2.3.2 Инъективность линейного отображения. Ранг и дефект	42
2.3.3 Факторпространство	42
2.3.4 Факторпространство и "усечение" фильтрации	43
2.3.5 Факторизация гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме	43
2.3.6 Основная точная последовательность	45
2.3.7 Три леммы о точных диаграммах	46
2.3.8 Конструкции с точными диаграммами	49
2.3.9 Подъем фильтрации. Аддитивность размерности	50
2.3.10 Мультипликативная функция: порядок конечной группы*	51
2.4 Прямые суммы и расщепление	53
2.4.1 Прямое дополнение	53
2.4.2 Прямые суммы в точных последовательностях*	54
2.5 Построение гомо-, изоморфизмов с помощью диаграмм	55
2.5.1 Лемма о змее и полезные изоморфизмы	55
2.5.2 Теоремы об изоморфизмах для групп, векторных пространств, модулей*	57
2.5.3 Ограничение, спуск и подъем нормального ряда.	

Разрешимые группы в точных последовательностях*	59
Глава 3. Эндоморфизмы векторных пространств	
(линейные операторы)	62
3.1 Предварительные сведения	62
3.1.1 Следствия результатов главы 2	62
3.1.2 Ранг, дефект и определитель как инварианты линейного оператора	63
3.2 Алгебра эндоморфизмов и группа автоморфизмов	64
3.2.1 Пространство эндоморфизмов	64
3.2.2 Алгебра эндоморфизмов векторного пространства	65
3.2.3 Группа обратимых элементов алгебры $\text{End}_k V$	68
3.2.4 Полная линейная группа	68
3.3 Гомоморфизм кольца полиномов. Понятие об инвариантах линейного оператора	69
3.3.1 \mathcal{A} -порожденная алгебра	69
3.3.2 Минимальный полином и его инвариантность	69
3.3.3 Структура подалгебры $k[\mathcal{A}]$	70
3.3.4 Вычисление минимального полинома	71
3.3.5 Частные случаи	72
3.4 Инвариантные подпространства и фильтрации. Фактороператор. Верхнетреугольная форма линейного оператора	73
3.4.1 Инвариантное подпространство	73
3.4.2 Собственные векторы и собственные значения	73
3.4.3 Вычисление собственных векторов и собственных значений	74
3.4.4 Характеристический полином и инвариантность собственных значений	75
3.4.5 Кратности собственных значений	76
3.4.6 Сумма собственных подпространств	77
3.4.7 Диагонализируемые операторы	77
3.4.8 Поля \mathbb{C} , \mathbb{R} и инвариантные подпространства	79
3.4.9 Инвариантная фильтрация	80
3.4.10 Инвариантная точная последовательность и фактороператор	81
3.5 Инвариантное расщепление и жорданова форма оператора	81
3.5.1 Матрица линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством	81
3.5.2 Матрица фактороператора в индуцированном базисе	82
3.5.3 Теорема Гамильтона – Кэли	83
3.5.4 Прямое разложение на нильпотентную и обратимую части	84
3.5.5 Единственность разложения	85

3.5.6 Канонические виды линейного оператора	85
3.5.7 Жорданова клетка. Жорданова матрица	86
3.5.8 Корневые подпространства	87
3.5.9 Прямая сумма корневых подпространств	88
3.5.10 Случай нильпотентного оператора: результат	89
3.5.11 Доказательство предложения 3.5.13	90
3.5.12 Единственность жордановой нормальной формы	92
3.5.13 Алгоритм приведения матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме	93
3.5.14 Степень линейного оператора и дробление жордановых клеток	95
Глава 4. Двойственность	97
4.1 Двойственные пространства и двойственные гомоморфизмы	97
4.1.1 Двойственное пространство	97
4.1.2 Линейные функции	98
4.1.3 Двойственный гомоморфизм	99
4.1.4 Композиции и диаграммы	99
4.2 Двойственная точная последовательность и двойственные базисы	100
4.2.1 Базис в V^V	100
4.2.2 Смена базисов: "ко" и "контра"	101
4.2.3 Гомоморфизмы в двойственных базисах	102
4.2.4 Инъективность, сюръективность и двойственность	104
4.2.5 Двойственность и точная последовательность	104
4.3 Каноническое спаривание и его невырожденность	105
4.3.1 Каноническое спаривание	105
4.3.2 Невырожденность канонического спаривания	106
4.3.3 Рефлексивность векторных пространств	107
4.3.4 Другое доказательство теоремы 4.3.4	108
4.3.5 Существование инвариантной максимальной фильтрации	109
4.3.6 Приведение матрицы линейного оператора к верхне- треугольному виду (алгоритм)	110
4.4 Приложения и комментарии	110
4.4.1 Интерпретация однородных линейных систем	110
4.4.2 Сумма, пересечение и двойственность	111
4.4.3 Замечания о двойственности*	112
Литература	114