Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Д.Ф. Белоножко
С.О. Ширяева
А.И. Григорьев

Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости

Ярославль 2006

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322
Б 43

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2006 года

Рецензенты
д-р физ.-мат. наук Коромыслов В.А.;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Б 43 **Белоножко, Д.Ф.** Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости : моногр. / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288 с.

ISBN 5-8397-0507-1 (978-5-8397-0507-4)

В монографии в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности идеальной и вязкой несжимаемой жидкости в плоской и цилиндрической геометриях.

Книга издана при поддержке грантов Президента РФ № МК-929.2003.01 и МД-1990.2005.1, а также грантов РФФИ
№ 03-01-00760, № 05-08-01147-а, №06-01-00066-а.

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322

ISBN 5-8397-0507-1
(978-5-8397-0507-4)

ђqqqyeY bĘ dəqĘpYəe d easpcy Jqqqyqyè

1. Введение. Периодические волны на однородно заряженной плоской поверхности несжимаемой жидкости

1. Линейные волны. Началом теоретического исследования периодических волн на заряженной поверхности жидкости является работа Я.И. Френкеля [1], в которой исследован вопрос об условиях реализации неустойчивости поверхности жидкости по отношению к избытку поверхностно распределенного электрического заряда. Л.А. Тонкс за год до появления работы Френкеля провел качественную оценку условий реализации этой неустойчивости [2]. Он получил критерий неустойчивости заряженной поверхности жидкости с точностью до коэффициента □ 2, сравнивая лапласовское давление под искажением, в виде сферического сегмента, рельефа плоской поверхности с давлением на него однородного электростатического поля, направленного перпендикулярно невозмущенной поверхности.

На практике неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда проявляется в том, что при превышении поверхностной плотности заряда некоторого критического значения с поверхности жидкости начинается сброс электрического заряда в виде большого числа маленьких сильно заряженных капелек [3]. Сначала на поверхности образуются конусообразные выступы – конусы Тейлора. Затем с вершин этих выступов электрическое поле начинает отрывать заряженные капельки [4, 5].

Френкель строго вывел уточненный критерий неустойчивости в рамках метода нормальных мод [6]. Он рассмотрел в линейном по амплитуде волны приближении задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности идеальной несжимаемой, идеально проводящей бесконечно глубокой жидкости. В системе координат $OXYZ$ с осью OZ, направленной вертикально вверх, и плоскостью OXY, совпадающей с равновесной в поле сил тяжести плоской поверхностью жидкости, полная математическая формулировка этой задачи имеет вид [1,7]:

$$z > 0: \qquad \Delta\Phi = 0; \qquad\qquad z < 0: \qquad \Delta\varphi = 0;$$

ŋqdbɏeɎ bɆ dedɆbɎɜe d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

$$z=0: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \qquad -\rho g\xi-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\kappa_0\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0;$$

$$\Phi-4\pi\kappa_0\xi=0;$$

$$z\to\infty: \qquad |\nabla\Phi|\to 0; \qquad z\to-\infty: \qquad |\nabla\varphi|\to 0.$$

Здесь t – время; $\xi=\xi(t,x)$ – отклонение свободной поверхности жидкости от плоской равновесной формы; κ_0 – поверхностная плотность электрического заряда в равновесном состоянии; ρ и γ – плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости соответственно; g – ускорение поля силы тяжести; $\varphi=\varphi(t,x,z)$ – потенциал поля скоростей в жидкости, обусловленный возмущением ее свободной поверхности; $\Phi=\Phi(t,x,z)$ – добавка к величине электрического потенциала над поверхностью жидкости, вызванная отклонением формы этой поверхности от равновесной плоской. Для простоты движение жидкости считается не зависящим от координаты y.

Решение задачи Френкеля в комплексной форме имеет вид [1, 7]:

$$\xi=\zeta\exp(i(kx-\omega t)); \qquad \omega=\sqrt{kg\left(1+k^2\frac{\rho g}{\gamma}-kW\right)}.$$

Безразмерный параметр $W>0$ в дальнейшем будет называться параметром Тонкса-Френкеля. Он равен отношению электрических и лапласовских сил под искривлением свободной поверхности жидкости с характерным линейным масштабом, равным капиллярной постоянной жидкости, и определяется выражением:

$$W=\frac{4\pi\kappa_0^2}{\sqrt{\rho g\gamma}}.$$

Общим решением задачи Френкеля является суперпозиция синусоидальных прогрессивных волн различных длин $\lambda=2\pi/k$, где k – волновое число. Принимается, что свободная поверхность жидкости подвержена тепловым возмущениям, которые в фиксированный момент времени образуют рельефную структуру с характерной высотой складок $\sim\sqrt{\mathbf{k}T/\gamma}$, где $\mathbf{k} = 8.31\cdot 10^7\ \text{эрг}/(\text{моль}\cdot\text{град})$ – постоянная Больцмана. Согласно принципам гармонического анализа, такой рельеф можно представить суперпозицией «простейших гармонических складок». Решение Френкеля показывает, как такие простейшие возмущения, называемые в дальнейшем модами, будут эволюционировать во времени.

При $0 \le W \le 2$ амплитуда всех возможных тепловых возмущений остается малой $\sim\sqrt{\mathbf{k}T/\gamma}$. При W>2 существует интервал волновых чисел:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}\left(W-\sqrt{W^2-4}\right) < k < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}\left(W+\sqrt{W^2-4}\right),$$

для которых амплитуды возмущений экспоненциально растут во времени. В рамках линейного подхода это нарастание не ограничено (т.е. обеспечено до тех пор, пока амплитуда волны уже не сможет считаться весьма малой по сравнению с ее длиной).

Складывается следующая картина явления. Если $0 \le W < 2$, то на свободной поверхности лапласовские силы преобладают над электрическими на вершинах возмущений равновесной поверхности, связанных со всеми возможными модами. Поэтому плоская равновесная форма свободной поверхности оказывается устойчивой по отношению к любым виртуальным возмущениям.

Для каждой моды с волновым числом k имеется свое пороговое значение параметра Тонкса-Френкеля

$$W_k = k\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}},$$

при котором на гребнях искажения свободной поверхности жидкости лапласовские и электрические силы в точности уравновешиваются. Любое, даже малое, превышение параметром W порогового значения приводит к нарушению равновесия в сторону доминирования электрических сил, стремящихся увеличить амплитуду возмущения. Мода с волновым числом