V. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Абсолютно твердое тело. Число степеней свободы. *Абсолютно твердым телом называется такая механическая система материальных точек, в которой расстояния между любыми двумя точками остаются неизменными, как бы система не двигалась.* Условимся в дальнейшем для краткости под термином «твердое тело» или просто «тело» понимать абсолютно твердое тело, если не будет оговорено противное. В кинематике должны быть поставлены и разрешены следующие задачи:

1) найти способы задания (описания) движения тела;

2) найти способы нахождения (описания) движения точек, принадлежащих телу, вычисления их скоростей и ускорений.

При исследовании этих вопросов придется вводить некоторые новые величины, характеризующие движение тел (угловая скорость $\overline{\omega}$, угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$). В задачи кинематики входит определение этих величин и нахождение способов их вычисления.

Займемся задачей отыскания способов задания движения твердого тела, т. е. отыскания его положения в каждый момент времени движения относительной данной системы координат. Убедимся, что для задания положения тела достаточно задать положения любых его точек A, B, C, не лежащих на одной прямой. Действительно, если точка A займет положение A_1, B – B_1, C – C_1 (при этом $\Delta A_1B_1C_1$ конгруэнтен ΔABC), то

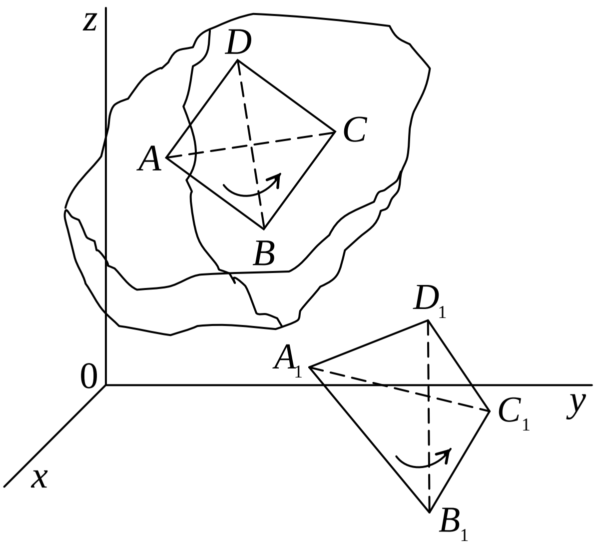

Рис. 38

положение любой точки тела D определится, т.к. расстояния от точки D до точек A, B, C, измениться не могут, т.е. $A_1D_1 = AD$, $B_1D_1 = BD$, $C_1D_1 = CD$. Из двух возможных положений D_1 (если D не принадлежит ΔABC) нужное можно выбрать, зная направление обхода (по или против часовой стрелки) точек A, B, C, видимых из точки D: оно должно сохраниться для A_1, B_1, C_1 относительно D_1.

Другое доказательство можно получить аналитическим способом. Три координаты точки D связаны с координатами точек A, B, C тремя соотношениями:

$$\begin{cases}(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2 = AD^2 = \text{const},\\ (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2 = BD^2 = \text{const},\\ (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2 = CD^2 = \text{const}.\end{cases}$$

Числа AD^2, BD^2, CD^2 зависят от положения точек A, B, C. Из трех соотношений три величины – x_D, y_D, z_D – могут быть выражены как функции остальных величин. Три точки A, B, C имеют 9 координат, но эти координаты не являются независимыми, т. к. должны удовлетворять трем соотношениям, выражающим неизменность длин AB, BC, CA:

$$\begin{cases}(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{const},\\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{const},\\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{const}.\end{cases}$$

Значит, независимых среди этих координат: $9 - 3 = 6$.

Вывод: для задания положения тела в пространстве надо знать значения шести независимых величин – шести координат точек A, B, C.

Введем некоторые новые понятия. Положение точки в пространстве декартовой прямоугольной системы координат определяется тремя независимыми координатами x, y, z. Эти координаты «независимы», потому что каждая может принимать любые значения независимо от значений двух других. Координаты x, y, z – зависимы, если одна или две из них определяются значениями двух или одной, т. е. связаны уравнениями: