

**УДК 519.2**  
**ББК 22.17**  
**Я47**

**Рецензенты:**

*Б. И. Олейников* — кандидат технических наук, доцент Российского университета кооперации;

*Н. А. Веклич* — кандидат физико-математических наук, доцент Российского государственного университета нефти и газа имени И. М. Губкина.

**Яковлев, Виталий Павлович.**

**Я47** Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для бакалавров / В. П. Яковлев, Н. Е. Кошелева. — 5-е изд., пересм. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2022. — 182 с.

ISBN 978-5-394-04978-1.

Дается логически последовательное изложение традиционного курса теории вероятностей и математической статистики, основанное на исследованиях А. Н. Колмогорова по теории сложности нерегулярных последовательностей. Рассмотрены информационные и физические обоснования понятия независимости, проблемы регрессионного подхода, оптимизации технического эксперимента, а также актуальные проблемы аналого-цифрового преобразования, распознавания образов и выделения сигнала на фоне шума.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки, входящим в укрупненную группу «Экономика и управление», а также экономистов и инженеров, использующих математическое моделирование.

**УДК 519.2**  
**ББК 22.17**

ISBN 978-5-394-04978-1

© Яковлев В. П., 2007

© Яковлев В. П., Кошелева Н. Е., 2022,  
с изменениями

# СОДЕРЖАНИЕ

|                  |   |
|------------------|---|
| Предисловие..... | 7 |
|------------------|---|

## Часть I ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.....                                  | 9  |
| § 1.1. Определение вероятности.....                              | 9  |
| § 1.2. Свойства вероятности события.....                         | 12 |
| § 1.3. Свойства статистического ансамбля.....                    | 19 |
| § 1.4. Эпсилон-зависимость.....                                  | 25 |
| § 1.5. Формализация теории вероятностей.....                     | 29 |
| § 1.6. Примеры решения задач теории<br>вероятностей событий..... | 36 |
| § 1.7. Кодирование источника сообщений .....                     | 40 |
| § 1.8. Информация.....                                           | 46 |
| Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....                                 | 49 |
| § 2.1. Распределение вероятностей.....                           | 49 |
| § 2.2. Непрерывные случайные величины.....                       | 52 |
| § 2.3. Классификация.....                                        | 55 |
| § 2.4. Примеры законов распределения.....                        | 58 |
| § 2.5. Критерий трех сигм и доверительный интервал.....          | 61 |
| § 2.6. Совместное распределение вероятностей .....               | 63 |
| § 2.7. Взаимная информация случайных величин.....                | 65 |

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Глава 3. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....                                          | 71 |
| § 3.1. Расчет плотности вероятностей.....                                           | 71 |
| § 3.2. Линейные преобразования случайных величин.....                               | 74 |
| § 3.3. Многомерное гауссовское распределение.....                                   | 77 |
| § 3.4. Суммирование случайных величин.....                                          | 80 |
| § 3.5. Центральная предельная теорема.....                                          | 83 |
| Глава 4. ТЕОРИЯ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО<br>ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....                            | 87 |
| § 4.1. Оптимизация.....                                                             | 87 |
| § 4.2. Асимптотические соотношения<br>при малых шагах равномерного квантования..... | 89 |
| § 4.3. Энтропийное кодирование квантованных величин.....                            | 91 |

## Часть II МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.....                       | 97  |
| § 5.1. Предмет статистики.....                                | 97  |
| § 5.2. Достоверность рейтингов и гистограмм.....              | 99  |
| Глава 6. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ<br>НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ..... | 102 |
| § 6.1. Задача различения гипотез.....                         | 102 |
| § 6.2. Функция правдоподобия.....                             | 107 |
| § 6.3. Распознавание образов.....                             | 114 |
| Глава 7. ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА.....                  | 118 |
| § 7.1. Статистическое оценивание.....                         | 118 |
| § 7.2. Максимально правдоподобное оценивание.....             | 121 |
| Глава 8. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....                            | 127 |
| § 8.1. Регрессионная модель.....                              | 127 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| § 8.2. Статистический подход к регрессии..... | 132 |
| § 8.3. Оценка тенденции .....                 | 135 |

## Глава 9. ПЛАНИРОВАНИЕ

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| ТЕХНИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ..... | 139 |
|---------------------------------|-----|

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| § 9.1. Экстремальное регулирование .....        | 139 |
| § 9.2. Модификация регрессии.....               | 143 |
| § 9.3. Статистический анализ регрессии .....    | 148 |
| § 9.4. Алгоритм планирования эксперимента ..... | 151 |

## Приложения:

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Формула Стирлинга .....                                                                                                 | 154 |
| 2. Расчет энтальпии случайной величины.....                                                                                | 155 |
| 3. Независимые последовательности с половинной<br>вероятностью .....                                                       | 159 |
| 4. Оценка параметров<br>двумерного нормального распределения.....                                                          | 162 |
| 5. Методические указания к выполнению<br>домашних заданий курса “Теория вероятностей<br>и математическая статистика” ..... | 166 |
| Задание 1. Расчет частот символов (букв)<br>печатного текста .....                                                         | 166 |
| Задание 2. Расчет вероятности ситуации при игре.....                                                                       | 169 |
| Задание 3. Транспортная задача .....                                                                                       | 169 |
| Задание 4. Расчет среднего значения и дисперсии<br>по заданной плотности вероятности .....                                 | 169 |
| Задание 5. Расчет допусков на частоты букв<br>с помощью закона Бернулли .....                                              | 169 |
| Задание 6. Оценка качества распознавания символов<br>текста по частотам отрывков .....                                     | 172 |
| Задание 7. Расчет средних частот и их дисперсий<br>по результатам для пяти отрывков.....                                   | 173 |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Задание 8. Расчет энтропии печатного текста.....                     | 174 |
| Задание 9. Повторный эксперимент<br>при распознавании образов.....   | 174 |
| Задание 10. Регрессия курса валют.....                               | 174 |
| Задание 11. Расчет параметров регрессии<br>за период 10–60 дней..... | 175 |
| Задание 12. Оценка достаточности<br>линейной зависимости.....        | 176 |
| Задание 13. Оценка корреляции<br>курсов доллара и евро.....          | 176 |
| ЛИТЕРАТУРА.....                                                      | 179 |