Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций и упражнения по курсу

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

/Логика предикатов/

пособие для студентов специальностей 01.03.01, 01.05.01, 02.03.01

Воронеж
2015

Оглавление

Правило ($\exists л$) есть обобщение свойства дизъюнкции: если дизъюнкция ложна, то ложны все ее операнды.

♦В правилах существования мы использовали нетрадиционный знак $|\approx$, которому мы придаем следующий смысл: если выполнено то, что написано слева от него, то можно ввести в рассмотрение *новую* (т.е. не участвовавшую ранее в данном рассуждении) константу n, для которой верно написанное справа от этого знака. ♣Например, если доказано, что уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы одно решение, т.е. $\exists(x)[f(x)=0]$, то можно обозначить новой для данного рассуждения буквой n одно из его решений (без уточнения того, какое это именно решение) и в дальнейшем пользоваться истинным утверждением $f(n)=0$. Аналогично, если известно, что утверждение $\forall(x)[f(x)=0]$ ложно, то можно ввести новую константу n, для которой $f(n)\neq 0$.

2.1.4. Ограниченные кванторы.

♣Как уже отмечалось, в логике предикатов действует соглашение о том, что все предметные переменные имеют одну и ту же область изменения D. В математических теориях часто рассматриваются объекты различной природы: числа, множества, функции и т.п. Все они составляют единую предметную область D, а если некоторый квантор должен относиться только к части этой области, то на переменную, по которой он применяется, накладывают *ограничение*. Пример:

$$\forall(\varepsilon:\varepsilon>0)\exists(n:n\in\mathbf{N})[\frac{1}{n}<\varepsilon]. \qquad (6)$$

♦Ограниченные кванторы не являются новыми логическими операциями; они сводятся к обычным кванторам с помощью следующих определений:

$$\forall(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\forall(x)[A(x)\rightarrow B(x)] \ ,$$

$$\exists(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\exists(x)[A(x)\wedge B(x)] \ .$$

♣Например, утверждение (6) в обычных кванторах принимает вид

$$\forall(\varepsilon)[\varepsilon>0\rightarrow\exists(n)[n\in\mathbf{N}\wedge\frac{1}{n}<\varepsilon]].$$

2.1.5. Упражнение.

Записать данные формулы на обычном языке и определить, истинны ли они в теории.

1. $\exists(x:x\in\mathbf{R})\forall(n:n\in\mathbf{N})[n>x]$.

2. $\forall(a:a\in\mathbf{R})\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1=0]$.

3. $\forall(a:a\in\mathbf{R}\wedge\neg a=0)[\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\wedge\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1<0]]$.

4. $\exists(a:a\in\mathbf{R})\forall(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]$.

5. $\forall(a\in\mathbf{R})[\exists(x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\rightarrow\exists(y\in\mathbf{R})[ay+1<0]]$.

6. $\exists(c\in\mathbf{R})[\neg\forall(x\in\mathbf{R})[x^2+x+c>0]]$.

ђqdpуeY bЕ dеpЕbУзe d еэаоэу Jqdpўqуè

7. $\forall(a \in \mathbf{R} : a \geq 0)\exists(x \in \mathbf{R})[ax^2 + x + 1 > 0]$.

8. $\forall(a,b,c \in \mathbf{R})[b^2 < 4ac \to \exists(x_1, x_2)[ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \wedge ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \wedge x_1 \neq x_2]]$

9. $\forall(a \in \mathbf{R})\exists(x \in \mathbf{R})\forall(c \in \mathbf{R})[ax^2 + x + c^2 > 0]$.

10. $\exists(a \in \mathbf{R})\forall(c \in \mathbf{R})\exists(x \in \mathbf{R})[ax^2 + x + c > 0]$.

2.1.6. Пример формализации в языке прикладной логики предикатов.

♣ Рассмотрим на следующем примере дополнения к процедуре формализации, рассмотренной в 1.2.4 и 1.2.6. Эти дополнения относятся к таким формам предложений, как “Для любого... выполнено...” и “Существует..., для которого выполнено...” .

♣ *Для любых вещественных* a, b, c *верно, что если* $ac < 0$, *то* $ax^2 + bx + c < 0$ *при некотором вещественном x.*

Очевидно, утверждение “$ax^2 + bx + c < 0$ *при некотором вещественном x*” можно без изменения смысла и логической формы преобразовать в “*Существует вещественное x, для которого* $ax^2 + bx + c < 0$ ”. Теперь перевод на язык прикладной логики предикатов дает формулу

$$\forall(a : a \in \mathbf{R})\forall(b : b \in \mathbf{R})\forall(c : c \in \mathbf{R})[ac < 0 \to \exists(x : x \in \mathbf{R})[ax^2 + bx + c < 0]]. \quad (7)$$

Группу следующих друг за другом *одноименных* кванторов часто записывают в виде одного квантора по нескольким переменным. Кроме того, если это не может вызвать недоразумений, в круглых скобках рядом с квантором не указывают отдельно имя переменной, а пишут сразу предикат, ограничивающий ее значения:

$$\forall(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R})[ac < 0 \to \exists(x \in \mathbf{R})[ax^2 + bx + c < 0]]. \quad (8)$$

•*Если для записи данного предложения воспользоваться знаком следования в теории, то квантор общности не нужен:*

$$a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}, ac < 0 \Rightarrow \exists(x \in \mathbf{R})[ax^2 + bx + c < 0]. \quad (9)$$

Напомним, это соотношение означает, что *в любой интерпретации*, в которой истинны все аксиомы и определения теории вещественных чисел и посылки данного умозаключения, будет истинным и заключение. Квантор общности по всем *a, b, c* уже включен в эту формулировку. Формула (9) не принадлежит языку прикладной логики предикатов, так как знак “⇒” не принадлежит алфавиту этого языка; он входит (как и знак логического следствия) в *метаязык* логики, на котором изучаются предложения, написанные на языке логики. Отметим, что для реального математического языка запись (7) в виде (9) наиболее типична. Заметим также, что (9) эквивалентно тому, что в данной теории истинна импликация

$$a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R} \wedge c \in \mathbf{R} \wedge ac < 0 \to \exists(x \in \mathbf{R})[ax^2 + bx + c < 0]. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что $(7) \models (10)$, но $(10) \not\models (7)$. Однако в следующем пункте будет показано, что из истинности (10) в теории вытекает истинность в этой теории утверждения (7).

2.1.7. Правило обобщения.

• *Если в некоторой теории истинно предложение* $P(z)$, *причём буква z не входит свободно в аксиомы и определения этой теории, то в ней истинно и предложение* $\forall(z)P(z)$.

♥Для доказательства предположим, что последняя формула не является истинной, т.е. не следует логически из аксиом и определений рассматриваемой теории. Тогда найдётся такая интерпретация $\mathbf{I}$ аксиом, определений и предиката P, в которой истинны аксиомы и определения, а утверждение $P(z)$ ложно хотя бы для одного значения $z = z_0$ из предметной области данной интерпретации.
Добавив к интерпретации $\mathbf{I}$ интерпретацию переменной z как константы z_0, мы получим интерпретацию $\mathbf{I}_z$, в которой аксиомы и определения попрежнему истинны (так как z в них не входит в свободном виде), а предложение $P(z)$, принявшее вид $P(z_0)$, ложно. Но это противоречит тому, что $P(z)$ *истинно.* Утверждение доказано.

♣ Чаще всего правило обобщения используется в следующей форме:

• *если для некоторой теории выполнено соотношение* $P(z) \Rightarrow Q(z)$, *причём буква z не входит свободно в аксиомы и определения этой теории, то в ней истинно предложение* $\forall(z)[P(z) \to Q(z)]$.

Это утверждение есть непосредственное следствие правила обобщения, поскольку из его условия, очевидно, вытекает истинность в данной теории импликации $P(z) \to Q(z)$.

♣ Например, из истинности утверждения (10) в теории вещественных чисел (аксиомы и определения которой не содержат свободных вхождений букв a,b,c) вытекает истинность в этой теории утверждения (7). Это обычный путь доказательства утверждений вида (7): сначала вводят *допущения*, написанные в левой части (9), затем из этих допущений-посылок выводят как следствие в данной теории правую часть (9) и, наконец, делают вывод, что справедливо (7). Правило обобщения есть формальное обоснование этой привычной и интуитивно понятной методики доказательства утверждений с квантором общности.

2.1.8. Упражнение.

Формализовать данный предикат в языке прикладной логики предикатов. Определить, является ли он истинным.

1. Неравенство $x^2 \geq 0$ справедливо для любого действительного x.