

УДК 531  
ББК 22.236  
3362



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №07-02-07053.

**Заславский Г. М.**

Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. — 472 с.

Монография известного специалиста по теории динамического хаоса и физике нелинейных явлений включает обширный материал и объединяет трудные, а также еще не решенные задачи общей теории хаотических систем. Помимо известных вещей, таких как эргодичность, элементы теории КАМ, перемешивание, нелинейный резонанс, гиперболичность и др., здесь читатель найдет широкие сведения о гамильтоновой динамике и сепаратрисному хаосу, математических бильярдах, фрактальных свойствах хаотических траекторий, теории возмущений за пределами КАМ-подхода, полетах Леви и случайных блужданиях, диффузионных процессах и кинетике. Большой раздел посвящен исследованиям фрактального кинетического уравнения. Последняя часть книги содержит важную информацию, относящуюся к фундаментальным вопросам обоснования статистической физики. Особое место в монографии занимают такие достаточно новые и интересные разделы, как возвращения Пуанкаре и демон Максвелла, неэргодичность, динамические квазизахваты, сложность и энтропия,  $\log$ -периодичность, динамическое охлаждение и пространственно-временная фрактальность, и др.

Книга может быть полезна студентам, аспирантам, преподавателям и всем, кто интересуется современными проблемами динамического хаоса.

**ISBN 978-5-93972-834-8**

**ББК 22.236**

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	xi
 <b>ЧАСТЬ I. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА</b>	 <b>1</b>
<b>ГЛАВА 1. Гамильтонова динамика</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1. Уравнения Гамильтона . . . . .	3
1.2. Динамика фазового пространства . . . . .	5
 <b>ГЛАВА 2. Примеры гамильтоновой динамики</b> . . . . .	 <b>12</b>
2.1. Маятник . . . . .	12
2.2. Колебания в бесконечной потенциальной яме . . . . .	15
2.3. Магнитные моменты . . . . .	16
2.4. Поведение силовых линий . . . . .	18
2.5. Уравнения Гамильтона для АВС-потока . . . . .	20
 <b>ГЛАВА 3. Возмущенная динамика</b> . . . . .	 <b>23</b>
3.1. Теорема Луивилля–Арнольда об интегрируемости . . . . .	23
3.2. Следствия интегрируемости . . . . .	25
3.3. Неинтегрируемость и условие Козлова . . . . .	26
3.4. Резонансы . . . . .	28
3.5. Нелинейный резонанс и цепочка островов . . . . .	29
3.6. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) . . . . .	33
 <b>ГЛАВА 4. Хаотическая динамика</b> . . . . .	 <b>37</b>
4.1. Естественная мера . . . . .	37
4.2. Эргодичность, перемешивание и слабое перемешивание . . . .	40
4.3. Локальная неустойчивость и показатели Ляпунова . . . . .	43
4.4. Гиперболические системы . . . . .	48
4.5. Энтропия динамических систем . . . . .	49
4.5.1. Разбиение и огрубление . . . . .	49
4.5.2. Энтропия Колмогорова–Синяя . . . . .	50

4.5.3. Топологическая энтропия . . . . .	53
4.5.4. Физическая интерпретация . . . . .	53
4.5.5. Энтропия и показатели Ляпунова . . . . .	55
4.6. Определение хаотической динамики . . . . .	55
4.7. Критерий перекрытия резонансов Чирикова . . . . .	56
<b>ГЛАВА 5. Физические модели хаоса . . . . .</b>	<b>60</b>
5.1. Динамика отображений . . . . .	60
5.2. Универсальное и стандартное отображения . . . . .	63
5.3. Отображение–паутина (осциллятор под действием ударов) . . . . .	68
5.4. Отображение Кеплера . . . . .	72
<b>ГЛАВА 6. Сепаратрисный хаос . . . . .</b>	<b>76</b>
6.1. Описание моделей . . . . .	76
6.2. Сепаратрисное отображение . . . . .	77
6.3. Стохастический слой . . . . .	82
6.4. Стохастический слой стандартного отображения . . . . .	85
6.5. Скрытая ренормгруппа вблизи сепаратрисы . . . . .	87
6.6. Ренормализация резонансов . . . . .	94
6.7. Скрытая ренормализация для связанных осцилляторов . . . . .	96
<b>ГЛАВА 7. Слабый хаос и симметрия . . . . .</b>	<b>102</b>
7.1. Стохастические паутины . . . . .	102
7.2. Стохастическая паутина с квазикристаллической симметрией . . . . .	105
7.3. Каркас стохастической паутины . . . . .	107
7.4. Симметрии и их динамические порождения . . . . .	118
7.5. Ширина стохастической паутины . . . . .	121
7.6. Симметрия в искусстве и природе . . . . .	125
7.6.1. Симметрия и хаос . . . . .	125
7.6.2. Орнаменты . . . . .	127
7.6.3. Узоры в природе . . . . .	127
<b>ГЛАВА 8. За рамками теории КАМ . . . . .</b>	<b>134</b>
8.1. Малая нелинейность . . . . .	134
8.2. Торы–паутина . . . . .	136
8.3. Ширина стохастической паутины . . . . .	143
8.4. Переход от КАМ-торов к торам–паутине . . . . .	145
8.4.1. Задачи . . . . .	148

<b>ГЛАВА 9. Хаос в фазовом пространстве</b>	149
9.1. Топологическая неуниверсальность хаоса	150
9.2. Примеры с бильярдами	152
9.3. Островки режима акселератора	154
9.4. Островки баллистического режима	162
9.5. Канторо-торы	163
9.6. Области залипания и уходы	165

## **ЧАСТЬ II. ФРАКТАЛЬНОСТЬ ХАОСА** 169

<b>ГЛАВА 10. Фракталы и хаос</b>	171
10.1. Фрактальная динамика	171
10.2. Обобщенная фрактальная размерность	173
10.3. Ренормгруппа и обобщенная фрактальная размерность	175
10.4. Мультифрактальные спектры	176
10.5. Термодинамическая интерпретация	180
10.6. Комплексная размерность и log-периодичность	182
<b>ГЛАВА 11. Возвращения Пуанкаре</b>	187
11.1. Теорема Пуанкаре о возвращении	187
11.2. Распределения времени возвращения и лемма Каца	188
11.3. Распределение возвращений при равномерном перемешивании	191
11.4. Другие асимптотики для возвращений	194
<b>ГЛАВА 12. Динамические захваты</b>	202
12.1. Определение динамического захвата	202
12.2. Ловушка типа «Иерархическая система островков» (ИСО)	205
12.3. Перенормировка для распределения времени выхода	208
12.4. Захват стохастическим слоем	212
<b>ГЛАВА 13. Фрактальное время</b>	216
13.1. Фрактальное время	216
13.2. Фрактальные и мультифрактальные возвращения	219
13.3. Мультифрактальное пространство-время и спектр его размерности	223
13.4. Критический показатель для возвращений Пуанкаре	226

## ЧАСТЬ III. ХАОТИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

229

ГЛАВА 14. Общие принципы кинетики . . . . .	231
14.1. Масштабы времени . . . . .	232
14.2. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) . . . . .	233
14.3. Принцип детального баланса . . . . .	237
14.4. Решения и нормальный транспорт . . . . .	238
14.5. Возрастание энтропии . . . . .	239
14.6. Условия Колмогорова и противоречие с динамикой . . . . .	240
14.7. Усеченные распределения . . . . .	242
ГЛАВА 15. Процессы Леви, полеты Леви и случайное блуждание Вейерштрасса . . . . .	246
15.1. Распределение Леви . . . . .	247
15.2. Процессы Леви . . . . .	249
15.3. Возвращения Пуанкаре и теоремы Феллера . . . . .	251
15.4. Полеты Леви и противоречие с динамикой . . . . .	253
15.5. Случайные блуждания Вейерштрасса (СБВ) . . . . .	259
ГЛАВА 16. Фрактальное кинетическое уравнение (ФКУ) . . . . .	264
16.1. Выведение ФКУ . . . . .	265
16.2. Условия для ФКУ . . . . .	269
16.3. Эволюция моментов (транспорт) . . . . .	270
16.4. Противоречие с динамикой . . . . .	271
16.5. Динамическое возникновение критических показателей . . . . .	273
16.6. Принципы моделирований . . . . .	278
ГЛАВА 17. Ренормгруппа кинетики (РГК) . . . . .	281
17.1. Пространственно-временные масштабирования . . . . .	281
17.2. Log-периодичность . . . . .	284
17.3. Двойственность динамики и возникновение мультифрактальности . . . . .	285
17.4. Мультифрактальная кинетика . . . . .	288
ГЛАВА 18. Фрактальное кинетическое уравнение: решения и видоизменения . . . . .	295
18.1. Решения ФКУ (ряды) . . . . .	295
18.2. Решения ФКУ (разделение переменных) . . . . .	297
18.3. Непрерывное по времени случайное блуждание (НВСБ) . . . . .	298
18.4. Блуждания Леви и другие обобщения НВСБ . . . . .	303

18.5. Противоречие с динамикой . . . . .	304
18.6. Субдиффузия и супердиффузия . . . . .	305
<b>ГЛАВА 19. Псевдохаос . . . . .</b>	<b>310</b>
19.1. Бильярды в многоугольниках . . . . .	310
19.2. Непрерывные дроби и масштабирования траекторий . . . . .	314
19.3. Фрактальная кинетика иррациональных траекторий . . . . .	320
19.4. Другие примеры псевдохаоса . . . . .	326
19.4.1. Бильярд в ромбе . . . . .	327
19.4.2. Другие типы бильярдov . . . . .	329
19.4.3. Пилообразное отображение-паутина . . . . .	330

## **ЧАСТЬ IV. ПРИЛОЖЕНИЯ** **337**

<b>ГЛАВА 20. Сложность и энтропия динамики . . . . .</b>	<b>339</b>
20.1. Сложность в фазовом пространстве . . . . .	340
20.2. Символическая и топологическая сложности . . . . .	341
20.3. Топологическая и метрическая энтропии . . . . .	344
20.4. Противоречие с динамикой . . . . .	349
<b>ГЛАВА 21. Функции сложности и энтропии . . . . .</b>	<b>351</b>
21.1. Определения функции сложности . . . . .	351
21.2. Вероятность $\epsilon$ -расхождения . . . . .	354
21.3. Вычисление функции локальной сложности . . . . .	356
21.4. Функция сложности полетов . . . . .	357
21.5. Энтропийная функция . . . . .	361
21.6. Полиномиальная и смешанная сложности и аномальный транспорт . . . . .	362
21.7. Бегущие волны и инварианты Римана энтропии и сложности . . . . .	365
<b>ГЛАВА 22. Хаос и обоснование статистической механики . . . . .</b>	<b>369</b>
22.1. Парадоксы Цермело и Лошмидта . . . . .	370
22.1.1. Исторические комментарии . . . . .	370
22.1.2. Парадокс возвращения . . . . .	371
22.1.3. Парадокс обратимости . . . . .	371
22.1.4. Замечания Больцмана . . . . .	372
22.2. Хаос и парадоксы . . . . .	372
22.3. Аномальные свойства бильярдov Синая и Бунимовича . . . . .	373
22.4. Демон Максвелла и хаос . . . . .	376

22.5. Демон Максвелла как динамическая модель . . . . .	378
22.6. Замечания о применении эргодической теории . . . . .	381
22.7. Замечания о динамическом охлаждении и исчезновении хаоса . . . . .	383
<b>ГЛАВА 23. Хаотическая адвекция (динамика трасеров) . . . . .</b>	<b>387</b>
23.1. Потoki Бельтрами с $q$ -кратной симметрией . . . . .	387
23.2. Сжимаемые спиральные потоки . . . . .	390
23.3. Сжимаемый поток с квазисимметрией . . . . .	396
<b>ГЛАВА 24. Адвекция вследствие точечных вихрей . . . . .</b>	<b>402</b>
24.1. Основные уравнения для точечных вихрей и адвекции . . . . .	402
24.2. Адвекция в системах с тремя вихрями . . . . .	405
24.3. Транспорт адвективных частиц (вихрей) . . . . .	408
<b>Приложение А. Эллиптические интегралы и эллиптические функции . . . . .</b>	<b>423</b>
<b>Приложение В. Спектр задачи Кеплера . . . . .</b>	<b>425</b>
<b>Приложение С. Дробное интегро-дифференцирование . . . . .</b>	<b>428</b>
<b>Приложение D. Формулы дробного исчисления . . . . .</b>	<b>433</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>437</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>453</b>