

УДК 531
ББК 22.236
3 362



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №07-02-07053.

Заславский Г. М.

Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. — 472 с.

Монография известного специалиста по теории динамического хаоса и физике нелинейных явлений включает обширный материал и объединяет трудные, а также еще не решенные задачи общей теории хаотических систем. Помимо известных вещей, таких как эргодичность, элементы теории КАМ, перемешивание, нелинейный резонанс, гиперболичность и др., здесь читатель найдет широкие сведения о гамильтоновой динамике и сепаратрисному хаосу, математических бильярдах, фрактальных свойствах хаотических траекторий, теории возмущений за пределами КАМ-подхода, полетах Леви и случайных блужданиях, диффузионных процессах и кинетике. Большой раздел посвящен исследованиям фрактального кинетического уравнения. Последняя часть книги содержит важную информацию, относящуюся к фундаментальным вопросам обоснования статистической физики. Особое место в монографии занимают такие достаточно новые и интересные разделы, как возвращения Пуанкаре и демон Максвелла, неэргодичность, динамические квазизахваты, сложность и энтропия, \log -периодичность, динамическое охлаждение и пространственно-временная фрактальность, и др.

Книга может быть полезна студентам, аспирантам, преподавателям и всем, кто интересуется современными проблемами динамического хаоса.

ISBN 978-5-93972-834-8

ББК 22.236

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	xi
ЧАСТЬ I. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА	
ГЛАВА 1. Гамильтонова динамика	3
1.1. Уравнения Гамильтона	3
1.2. Динамика фазового пространства	5
ГЛАВА 2. Примеры гамильтоновой динамики	12
2.1. Маятник	12
2.2. Колебания в бесконечной потенциальной яме	15
2.3. Магнитные моменты	16
2.4. Поведение силовых линий	18
2.5. Уравнения Гамильтона для АВС-потока	20
ГЛАВА 3. Возмущенная динамика	23
3.1. Теорема Луивилля–Арнольда об интегрируемости	23
3.2. Следствия интегрируемости	25
3.3. Неинтегрируемость и условие Козлова	26
3.4. Резонансы	28
3.5. Нелинейный резонанс и цепочка островов	29
3.6. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ)	33
ГЛАВА 4. Хаотическая динамика	37
4.1. Естественная мера	37
4.2. Эргодичность, перемешивание и слабое перемешивание	40
4.3. Локальная неустойчивость и показатели Ляпунова	43
4.4. Гиперболические системы	48
4.5. Энтропия динамических систем	49
4.5.1. Разбиение и огрубление	49
4.5.2. Энтропия Колмогорова–Синяя	50

4.5.3.	Топологическая энтропия	53
4.5.4.	Физическая интерпретация	53
4.5.5.	Энтропия и показатели Ляпунова	55
4.6.	Определение хаотической динамики	55
4.7.	Критерий перекрытия резонансов Чирикова	56
ГЛАВА 5.	Физические модели хаоса	60
5.1.	Динамика отображений	60
5.2.	Универсальное и стандартное отображения	63
5.3.	Отображение–паутина (осциллятор под действием ударов)	68
5.4.	Отображение Кеплера	72
ГЛАВА 6.	Сепаратрисный хаос	76
6.1.	Описание моделей	76
6.2.	Сепаратрисное отображение	77
6.3.	Стохастический слой	82
6.4.	Стохастический слой стандартного отображения	85
6.5.	Скрытая ренормгруппа вблизи сепаратрисы	87
6.6.	Ренормализация резонансов	94
6.7.	Скрытая ренормализация для связанных осцилляторов	96
ГЛАВА 7.	Слабый хаос и симметрия	102
7.1.	Стохастические паутины	102
7.2.	Стохастическая паутина с квазикристаллической симметрией	105
7.3.	Каркас стохастической паутины	107
7.4.	Симметрии и их динамические порождения	118
7.5.	Ширина стохастической паутины	121
7.6.	Симметрия в искусстве и природе	125
7.6.1.	Симметрия и хаос	125
7.6.2.	Орнаменты	127
7.6.3.	Узоры в природе	127
ГЛАВА 8.	За рамками теории КАМ	134
8.1.	Малая нелинейность	134
8.2.	Торы–паутина	136
8.3.	Ширина стохастической паутины	143
8.4.	Переход от КАМ-торов к торам–паутине	145
8.4.1.	Задачи	148

ГЛАВА 9. Хаос в фазовом пространстве	149
9.1. Топологическая неуниверсальность хаоса	150
9.2. Примеры с бильярдами	152
9.3. Островки режима акселератора	154
9.4. Островки баллистического режима	162
9.5. Канторо–торы	163
9.6. Области залипания и уходы	165

ЧАСТЬ II. ФРАКТАЛЬНОСТЬ ХАОСА **169**

ГЛАВА 10. Фракталы и хаос	171
10.1. Фрактальная динамика	171
10.2. Обобщенная фрактальная размерность	173
10.3. Ренормгруппа и обобщенная фрактальная размерность	175
10.4. Мультифрактальные спектры	176
10.5. Термодинамическая интерпретация	180
10.6. Комплексная размерность и log-периодичность	182
 ГЛАВА 11. Возвращения Пуанкаре	187
11.1. Теорема Пуанкаре о возвращении	187
11.2. Распределения времени возвращения и лемма Каца	188
11.3. Распределение возвращений при равномерном перемешивании	191
11.4. Другие асимптотики для возвращений	194
 ГЛАВА 12. Динамические захваты	202
12.1. Определение динамического захвата	202
12.2. Ловушка типа «Иерархическая система островков» (ИСО)	205
12.3. Перенормировка для распределения времени выхода	208
12.4. Захват стохастическим слоем	212
 ГЛАВА 13. Фрактальное время	216
13.1. Фрактальное время	216
13.2. Фрактальные и мультифрактальные возвращения	219
13.3. Мультифрактальное пространство–время и спектр его размерности	223
13.4. Критический показатель для возвращений Пуанкаре	226

ЧАСТЬ III. ХАОТИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА	229
ГЛАВА 14. Общие принципы кинетики	231
14.1. Масштабы времени	232
14.2. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)	233
14.3. Принцип детального баланса	237
14.4. Решения и нормальный транспорт	238
14.5. Возрастание энтропии	239
14.6. Условия Колмогорова и противоречие с динамикой	240
14.7. Усеченные распределения	242
ГЛАВА 15. Процессы Леви, полеты Леви и случайное блуждание Вейерштрасса	246
15.1. Распределение Леви	247
15.2. Процессы Леви	249
15.3. Возвращения Пуанкаре и теоремы Феллера	251
15.4. Полеты Леви и противоречие с динамикой	253
15.5. Случайные блуждания Вейерштрасса (СБВ)	259
ГЛАВА 16. Фрактальное кинетическое уравнение (ФКУ)	264
16.1. Выведение ФКУ	265
16.2. Условия для ФКУ	269
16.3. Эволюция моментов (транспорт)	270
16.4. Противоречие с динамикой	271
16.5. Динамическое возникновение критических показателей	273
16.6. Принципы моделирований	278
ГЛАВА 17. Ренормгруппа кинетики (РГК)	281
17.1. Пространственно-временные масштабирования	281
17.2. Log-периодичность	284
17.3. Двойственность динамики и возникновение мультифрактальности	285
17.4. Мультифрактальная кинетика	288
ГЛАВА 18. Фрактальное кинетическое уравнение: решения и видоизменения	295
18.1. Решения ФКУ (ряды)	295
18.2. Решения ФКУ (разделение переменных)	297
18.3. Непрерывное по времени случайное блуждание (НВСБ)	298
18.4. Блуждания Леви и другие обобщения НВСБ	303

18.5. Противоречие с динамикой	304
18.6. Субдиффузия и супердиффузия	305
ГЛАВА 19. Псевдохаос	310
19.1. Бильярды в многоугольниках	310
19.2. Непрерывные дроби и масштабирования траекторий	314
19.3. Фрактальная кинетика иррациональных траекторий	320
19.4. Другие примеры псевдохаоса	326
19.4.1. Бильярд в ромбе	327
19.4.2. Другие типы бильярдov	329
19.4.3. Пилообразное отображение-паутина	330

ЧАСТЬ IV. ПРИЛОЖЕНИЯ 337

ГЛАВА 20. Сложность и энтропия динамики	339
20.1. Сложность в фазовом пространстве	340
20.2. Символическая и топологическая сложности	341
20.3. Топологическая и метрическая энтропии	344
20.4. Противоречие с динамикой	349

ГЛАВА 21. Функции сложности и энтропии	351
21.1. Определения функции сложности	351
21.2. Вероятность ϵ -расхождения	354
21.3. Вычисление функции локальной сложности	356
21.4. Функция сложности полетов	357
21.5. Энтропийная функция	361
21.6. Полиномиальная и смешанная сложности и аномальный транспорт	362
21.7. Бегущие волны и инварианты Римана энтропии и сложности	365

ГЛАВА 22. Хаос и обоснование статистической механики	369
22.1. Парадоксы Цермело и Лошмидта	370
22.1.1. Исторические комментарии	370
22.1.2. Парадокс возвращения	371
22.1.3. Парадокс обратимости	371
22.1.4. Замечания Больцмана	372
22.2. Хаос и парадоксы	372
22.3. Аномальные свойства бильярдov Синая и Бунимовича	373
22.4. Демон Максвелла и хаос	376

22.5. Демон Максвелла как динамическая модель	378
22.6. Замечания о применении эргодической теории	381
22.7. Замечания о динамическом охлаждении и исчезновении хаоса	383
ГЛАВА 23. Хаотическая адвекция (динамика трасеров)	387
23.1. Потoki Бельтрами с q -кратной симметрией	387
23.2. Сжимаемые спиральные потоки	390
23.3. Сжимаемый поток с квазисимметрией	396
ГЛАВА 24. Адвекция вследствие точечных вихрей	402
24.1. Основные уравнения для точечных вихрей и адвекции	402
24.2. Адвекция в системах с тремя вихрями	405
24.3. Транспорт адвективных частиц (вихрей)	408
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Эллиптические интегралы и эллиптические функции	423
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Спектр задачи Кеплера	425
ПРИЛОЖЕНИЕ С. Дробное интегро-дифференцирование	428
ПРИЛОЖЕНИЕ D. Формулы дробного исчисления	433
Литература	437
Предметный указатель	453