

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова

В.Ш. Бурд

# ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов специальностей Математика  
и Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2006

УДК 517.925  
ББК В16я73  
Б 91

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2006 года.*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Ф. Бутузов;  
кафедра математического анализа

Ярославского государственного педагогического университета

**Бурд, В.Ш.** Введение в динамику одномерных отображений:  
учебное пособие / В.Ш. Бурд; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль:

Б 91 ЯрГУ, 2006. – 104 с.

ISBN 5-8397-0491-1 (978-5-8397-0491-6)

Книга посвящена изложению основ теории одномерных дискретных динамических систем – одному из самых эффективных методов исследования нелинейных процессов. Вводятся основные понятия и доказываются основные теоремы. Рассматриваются вопросы бифуркации и устойчивости периодических орбит, их сосуществования. Подробно исследованы наиболее простые нелинейные отображения интервала.

Учебное пособие по дисциплине „Дифференциальные уравнения“ (блок ОПД) предназначено студентам специальностей 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика очной формы обучения.

Рис. 14. Библиогр.: 32 назв.

УДК 517.925  
ББК В16я73

ISBN 5-8397-0491-1  
(978-5-8397-0491-6)

© Ярославский  
государственный университет  
им. П.Г. Демидова, 2006  
© Бурд В.Ш., 2006

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>1. Основные понятия и теоремы</b>	<b>7</b>
1.1. Введение . . . . .	7
1.1.1. Вспомогательные сведения из анализа . . . . .	8
1.2. Основные определения . . . . .	15
1.2.1. Топологическая сопряженность . . . . .	18
1.2.2. Грубые отображения . . . . .	20
1.3. Локальные бифуркации . . . . .	22
1.4. Глобальные бифуркации . . . . .	31
1.5. Производная Шварца и притягивающие циклы . . . . .	38
<b>2. Семейство квадратичных отображений</b>	<b>45</b>
2.1. Каскад бифуркаций удвоения . . . . .	45
2.2. Цикл периода 3 и число неустойчивых циклов . . . . .	53
2.3. Динамика отображения $f(x) = 4x(1 - x)$ . . . . .	58
2.4. Динамика отображения $f(x, r) = rx(1 - x)$ при $r > 4$ . . . . .	69
2.4.1. Пространство последовательностей из двух символов . . . . .	73
2.4.2. Отображение сдвига в $\Sigma_2$ и отображение $f(x, r)$ при $r > 2 + \sqrt{5}$ . . . . .	76
<b>Приложения</b>	<b>79</b>
Приложение 1. Асимптотика одномерных итераций . . . . .	79
Приложение 2. Совершенные нигде не плотные множества на вещественной прямой . . . . .	84
Приложение 3. Гиперболические множества и отображение $f(x, r) = rx(1 - x)$ при $r > 4$ . . . . .	88

Приложение 4. Одно кусочно-линейное разрывное отображение . . . . .	93
Приложение 5. Цикл периода 3 и хаос . . . . .	95
Приложение 6. Фрактальная размерность множеств . . . . .	95
Приложение 7. Показатель Ляпунова . . . . .	99

<b>Литература</b>	<b>102</b>
-------------------	------------

# Предисловие

В основу настоящего учебного пособия положен специальный курс, который читается автором студентам специальности “Прикладная математика”. Цель пособия – дать доступное студентам 3 – 4 курсов введение в круг вопросов, связанных с поведением нелинейных дискретных динамических систем, определяемых одномерными отображениями. Эта тематика в последние 25 лет вызывает огромный интерес, так как ее методы и результаты применимы к большому числу важных нелинейных задач от физики и химии до экологии и экономики.

Учебное пособие состоит из 2 глав, включающих 9 параграфов, и семи приложений.

В первой главе излагаются вспомогательные сведения из анализа, вводятся основные понятия – неподвижные точки, циклы. Обсуждаются вопросы устойчивости циклов, топологической сопряженности отображений, грубости отображений. В третьем параграфе рассматриваются однопараметрические семейства отображений. Описываются локальные бифуркации, возникающие при прохождении мультипликатора цикла через значения  $\pm 1$ . В одномерном случае существуют сильные ограничения на тип периодических орбит, которые могут сосуществовать. В четвертом параграфе обсуждаются вопросы сосуществования периодических орбит разных периодов. Развивается общая техника, которая позволяет из существования цикла периода  $k$  вывести существование циклов некоторых других периодов. Для этого используется конструкция соответствующего направленного графа. В пятом параграфе доказывается теорема Сингера о связи между устойчивостью циклов и критическими точками функции, порождающей динамическую систему.

В качестве примера изложенной теории во второй главе детально исследуется однопараметрическое семейство квадратичных функций  $f(x, r) = rx(1 - x)$  при изменении параметра  $r$  от 0 до значений  $r > 4$ . Попутно обсуждается каскад бифуркаций удвоения, вводятся постоянные Фейгенбаума, излагаются методы подсчета числа неустойчивых циклов. Для отображения  $f(x) = 4x(1 - x)$  дается достаточно полное описание динамики. Здесь же приводится одно из возможных определений хаотического отображения и доказывается, что вышеуказанное отображение хаотично. Исследуется динамика отображения  $f(x) = rx(1 - x)$  при  $r > 4$ . Вводится и изучается отображение сдвига на пространстве последовательностей из двух символов. Дано полное описание динамики отображения  $f(x) = rx(1 - x)$  при  $r > 2 + \sqrt{5}$ .

В семи приложениях описываются асимптотика одномерных итераций, построение нигде не плотных совершенных множеств на вещественной прямой, основные понятия теории гиперболических множеств и применение этих понятий к исследованию динамики отображения  $f(x) = rx(1 - x)$  при  $4 < r < 2 + \sqrt{5}$ ,