В. Любая сложная система всегда подвергается малым внешним и внутренним воздействиям, следовательно, математическая модель должна быть устойчивой, т.е. сохранять свои свойства и структуру при этих воздействиях.

Авторы предлагают следующую классификацию математических моделей (рис. 1.1).

В *стохастических моделях* неизвестные факторы – это случайные величины, для которых известны функции распределения и различные статистические характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение и т. п.).

Модели очередей изучают многоканальные системы, занятые обслуживанием требований.

Рисунок 1.1 – Классификация математических моделей

В *линейных моделях* целевая функция и ограничения линейны по управляющим переменным. Построение и расчет линейных моделей являются наиболее развитым разделом математического моделирования, поэтому часто к ним стараются свести и другие задачи либо на этапе постановки, либо в процессе решения. Для линейных моделей любого вида и достаточно большой размерности известны стандартные методы решения.

Нелинейные модели – это модели, в которых либо целевая функция, либо какое-нибудь из ограничений (либо все ограничения) нелинейны по управляющим переменным. Для нелинейных моделей нет единого метода расчета. В зависимости от вида нелинейности, свойств функции и ограничений можно предложить различные способы решения. Может случиться и так, что для поставленной нелинейной задачи вообще не существует метода расчета. В этом случае задачу следует упростить, просто линеаризовав модель.

В *динамических моделях* в отличие от статических линейных и нелинейных моделей учитывается фактор времени. Критерий оптимальности в динамических моделях может быть самого общего вида (и даже вообще не быть функцией), однако для него должны выполняться определенные свойства. Расчет динамических моделей сложен, и для каждой конкретной задачи необходимо разрабатывать специальный алгоритм решения.

Модели сетевой оптимизации используются тогда, когда задачу удобно представлять с помощью теории графов.

В *имитационных моделях* реальный процесс разворачивается в машинном времени, и прослеживаются результаты случайных воздействий на него.

Модели управления запасами служат для определения экономического размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта.

Модели дискретной оптимизации включают в себя модели целочисленного линейного программирования, модели размещения операций и балансировки линий сборки.

Модели управления проектами часто используются для планирования, оперативного управления и контроля за реализацией проектов, иногда с использованием вероятностных оценок времени выполнения работ, предусмотренных проектом.

Модели теории прогнозирования существуют для прогнозирования различных ситуации и определенных экономических явлений. В основе этих моделей лежит использование ретроспективных данных и измеряемых величин, а также неформализуемые факторы, как интуиция и опыт персонала в построении прогнозов.

ŋqdqуеҮ bƎ dеbƎbҮзе d єэабоу ЭqddҮqуè

Раздел 2

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 Постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом. Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \left(i = \overline{1, m_1}\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \ \left(i = \overline{m_1 + 1, m_2}\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \left(i = \overline{m_2 + 1, m}\right), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где x_j $(i = \overline{1, n})$ – управляющие переменные или решения задачи (2.1.1)–(2.1.2);

c_j, b_i, a_{ij} $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m})$ – параметры;

f – целевая функция или критерий эффективности задачи.

Функция (2.1.1) – линейная, ограничения (2.1.2) – линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных x_j $(i = \overline{1, n})$, удовлетворяющих ограничениям (2.1.2), при которых целевая функция (2.1.1) принимает минимальное или максимальное значение.

В этом разделе рассматривается общая линейная задача.

Приведем пример экономической задачи, сводящейся к линейной модели.

Пример 1. Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке. Заказчикам требуется 1000 изделий первого вида, 2000 изделий второго вида и 2500 изделий третьего вида.

Условия спроса на рынке ограничивают число изделий первого вида 2000 единицами, второго – 3000 и третьего – 5000 единицами.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов. Количество ресурсов, потребляемых для производства одного изделия, общее количество ресурсов и прибыль от реализации каждого вида изделия заданы в таблице.

Как организовать производство, чтобы:

1) обеспечить заказчиков;

2) не допустить затоваривания;

3) получить максимальную прибыль?

Тип	Вид изделий			Всего ресурсов
	1	2	3	
1	500	300	1000	25000000
2	1000	200	100	30000000
3	150	300	200	20000000
4	100	200	400	40000000
Прибыль	20	40	50	

Построение математической модели.

Выполним последовательно этапы построения математической модели, сформулированные в пункте 1.2.

1. Цель – получение максимальной прибыли.

2. Параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи.

3. Управляющие переменные:

x_1 – число изделий первого вида;

x_2 – число изделий второго вида;

x_3 – число изделий третьего вида.

4. Ограничения: обеспечить заказчиков, не превысить запас ресурсов, не допустить затоваривания рынка.

В соответствии с этими ограничениями выпишем область допустимых решений задачи:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000, \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 30000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Первые три неравенства в системе (2.1.3) соответствуют спросу заказчиков. Неравенства с четвертое по шестое формализуют спрос на рынке. Последние четыре неравенства соответствуют ограничениям по ресурсам.

5. Целевая функция, или критерий эффективности задачи, имеет вид

$$P = 20_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \max . \tag{2.1.4}$$

В формуле буквой Р обозначена прибыль. Ее надо максимизировать. Каждое слагаемое определяет прибыль от производства изделий каждого вида соответственно в количествах x_1, x_2, x_3.

(2.1.3) – (2.1.4) – математическая модель поставленной задачи. Ограничения и целевая функция линейны по управляющим переменным, следовательно, данная модель является линейной. (При составлении модели предполагалось, что прибыль линейно зависит от числа реализуемых изделий.)

2.2 Линейное программирование в экономике

2.2.1 Оптимизация плана производства

В данной главе приведены задачи, демонстрирующие возможности использования модели линейного программирования для определения плана производства. Эти возможности обобщаются для случая, когда закупка готовой продукции для последующей реализации может оказаться для производителя предпочтительнее, чем использование собственных мощностей. Рассматривается также задача производственного планирования, учитывающая динамику спроса, производства и хранения продукции.

Определение объема производства. Общая постановка задачи планирования производства: необходимо определить план производства одного или нескольких видов продукции, который обеспечивает наиболее рациональное использование имеющихся материальных, финансовых и других видов ресурсов. Такой план будет оптимальным с точки зрения какого-либо выбранного критерия – максимума прибыли, минимума затрат на производство и т.д.

Задачи планирования производства возникают на разных уровнях в системе экономического управления: на уровне отдельных производственных участков и бригад, предприятий, отраслей, на уровне народного хозяйства в целом:

$$f = \sum_j c_j x_j \to \max, \tag{2.2.1}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{2.2.2}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.2.3}$$

Обозначения:

n – количество видов выпускаемой продукции;

m – количество видов производственных ресурсов (производственные мощности, сырье, рабочая сила);

a_{ij} – объем i-го ресурса на выпуск единицы j-й продукции;

c_j – прибыль от выпуска единицы j-й продукции;

b_i – количество имеющегося ресурса i-го вида;

x_j – объем выпуска j-й продукции (переменная);

(2.2.1) – целевая функция (максимум прибыли);

(2.2.2) – группа ограничений на объем имеющихся в наличии ресурсов;

(2.2.3) – ограничения на неотрицательность переменных.

Пример 1. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудования, необходимыми для производства любого из четырех видов производимой продукции. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного ви-