МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Составители:
А. Д. Баев,
М.Ш. Бурлуцкая,
М.Б. Давыдова

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебно-методическом издании содержится теория преобразования Фурье и обобщенных функций.

Преобразование Фурье является мощным средством как для теоретического исследования многих вопросов, встречающихся в различных разделах математики, так и для решения многих практических задач.

Теория обобщенных функций находит многочисленные приложения при исследовании уравнений с частными производными, занимает значительное место в арсенале современных математических методов, применяемых не только специалистами-математиками, но также физиками и инженерами. Достаточно сказать, что она позволяет строго определить понятие разрывных решений дифференциальных уравнений, которые часто встречаются в практических задачах.

В следующем методическом издании авторами планируется рассмотрение свойств псевдодифференциальных операторов.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Покажем теперь, что для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ можно найти такую последовательность $g_\nu(x)$ ступенчатых функций, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - g_\nu(x) \right| dx \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{1.1.8}$$

Действительно, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую ступенчатую функцию $g(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - g(x) \right| dx < \varepsilon. \tag{1.1.9}$$

Так как интеграл от $|f(x)|$ по всей оси $-\infty < x < +\infty$ сходится, то существуют такие $b > a$, что

$$-\int_{-\infty}^{a} \left| f(x) \right| dx + \int_{b}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то в силу критерия интегрируемости существует такое разбиение $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ отрезка $[a,b]$, что $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \omega_i \Delta_i < \frac{\varepsilon}{2}$, где $\Delta_i = a_{i+1} - a_i$, $\omega_i = \sup\limits_{\substack{a_i < x < a_{i+1} \\ a_i < y < a_{i+1}}} \left| f(x) - f(y) \right|$.

Чтобы построить ступенчатую функцию $g(x)$, для которой выполняется (1.1.9), теперь достаточно положить $g(x) = 0$ вне $[a,b]$ и $g(x) = f(\xi_e)$ при $x \in (a_l, a_{l+1})$, где ξ_e – некоторая фиксированная точка из (a_l, a_{l+1}).

Таким образом, последовательность $g_\nu(x)$ ступенчатых функций, удовлетворяющих соотношению (1.1.8), построена. Заметим теперь, что из оценки $\left| \tilde{g}_\nu(\xi) - \tilde{f}(\xi) \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - g_\nu(x) \right| dx$, следует, что последовательность $\tilde{g}_\nu(\xi)$ равномерно сходится к $\tilde{f}(\xi)$. Следовательно, в силу свойств равномерно сходящихся последовательностей получаем утверждение леммы для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Замечание. Аналогичным образом определяется преобразование Фурье для функций, интегрируемых на всей оси $-\infty < x < +\infty$ по Лебегу, если интегралы в соответствующих формулах понимать в смысле теории интегрирования Лебега. В таком случае существование последовательности ступенчатых функций $g_v(x)$, обладающей свойством (1.1.8), непосредственно вытекает из теории интеграла Лебега.

1.1.2. Преобразование Фурье производной

Пусть абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ имеет производную при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, причем $f'(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема. В этом случае преобразование Фурье функции $f(x)$ и преобразование Фурье функции $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}f(x)$ связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\tilde{f}(x)\right)(\xi) = \xi \tilde{f}(\xi). \tag{1.1.10}$$

Докажем это. С помощью интегрирования по частям получаем, что

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\tilde{f}(x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\frac{1}{i}\frac{d}{dx}f(x)dx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}df(x) = \frac{e^{-ix\xi}f(x)}{i}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)de^{-ix\xi}.$$

Так как $de^{-ix\xi} = -i\xi e^{-ix\xi}dx$, то остается показать, что $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Поскольку справедливо равенство $f(x) = \int\limits_0^x f'(s)ds + f(0)$,

то в силу предположения об абсолютной интегрируемости функции $f'(x)$ функция $f(x)$ имеет пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Легко видеть, что если хотя бы один из этих пределов отличен от нуля, то функция $f(x)$ не может быть абсолютно интегрируемой, следовательно, $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Тем самым формула (1.1.10) доказана.

Формула (1.1.10) показывает, что при преобразовании Фурье операция дифференцирования переходит в алгебраическую операцию – умножение на $i\xi$ функции $\tilde{f}(\xi)$. Это открывает широкие возможности для применения преобразования Фурье при исследовании дифференциальных операторов.

1.1.3. Связь между убыванием функции $f(x)$ и гладкостью ее преобразования Фурье

Выше было показано, что преобразование Фурье $\tilde{f}(\xi)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ является ограниченной непрерывной функцией, стремящейся к нулю при $\xi \to \infty$. Формальное дифференцирование по переменной ξ интеграла (1.1.3), определяющего функцию $\tilde{f}(\xi)$, приводит к интегралу $-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} x f(x)\,dx$.

Предположим, что функция $xf(x)$ абсолютно интегрируема, тогда этот интеграл, зависящий от параметра ξ, равномерно сходится. Применяя теорему о дифференцировании по параметру несобственных интегралов, получим, что функция $\tilde{f}(\xi)$ имеет производную и справедливо равенство

$$\frac{d\tilde{f}(\xi)}{d\xi} = -i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} x f(x)\,dx.$$

Заметим, что правая часть этого равенства представляет собой преобразование Фурье функции $\frac{x}{i} f(x)$. Таким образом, получаем формулу

$$\left(\frac{\tilde{x}}{i}\tilde{f}(x)\right)(\xi) = \frac{d\tilde{f}(x)}{d\xi}, \qquad (1.1.11)$$

которая показывает, что операция умножения на выражение $\frac{x}{i}$ переходит после преобразования Фурье в операцию дифференцирования $\frac{d}{d\xi}$. Если вместе с функцией $f(x)$ абсолютно интегрируемыми являются и функции $xf(x),\ldots,x^m f(x)$, то интеграл в (1.1.3) можно будет дифференцировать m раз. Таким образом, чем более сильные условия убывания на бесконечности мы накладываем на функцию $f(x)$, тем более гладкой получается функция $\tilde{f}(\xi)$.

1.1.4. Формула обращения преобразования Фурье

Часто возникает такая ситуация, что мы не знаем самой функции $f(x)$, но можем найти функцию $\tilde{f}(\xi)$. В этом случае возникает задача обращения преобразования Фурье, то есть задача о вычислении функции $f(x)$ в точке x по известной функции $\tilde{f}(\xi)$. Следующая теорема дает решение этой задачи при дополнительном предположении о существовании производной функции $f(x)$ в точке x.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и существует производная $f'(x)$, то