МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие

Составитель Куликов А.А.

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие содержит введение в теорию рядов Фурье в линейном пространстве со скалярным произведением, а также в теорию тригонометрических рядов Фурье.

Пособие предназначено прежде всего для студентов 2 и 3 курсов факультета прикладной математики, информатики и механики. Оно будет полезно при проведении лекционных и практических занятий по дисциплинам «Математический анализ» и «Уравнения математической физики».

В §§1 и 2 учебно-методического пособия приводится ряд важнейших понятий теории линейных нормированных и полунормированных пространств и линейных пространств со скалярным и полускалярным произведением. Примеры указанных пространств приведены в § 3. В § 4 рассматриваются вопросы сходимости последовательностей элементов и рядов в линейных полунормированных пространствах. В § 5 изучаются ряды Фурье в линейном пространстве H со скалярным произведением. Показано, что частичные суммы ряда Фурье осуществляют наилучшее приближение элементов пространства H линейными комбинациями конечного числа ортогональных элементов из H, и получены необходимые и достаточные условия сходимости ряда Фурье. Приведены также понятия полной и замкнутой систем элементов из H. В § 6 в качестве важного для дальнейшего примера линейного пространства со скалярным произведением рассмотрено пространство кусочно-непрерывных на отрезке функций. Параграфы 7–12 содержат введение в теорию тригонометрических рядов Фурье. Рассмотрены вопросы сходимости в среднем тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции и приведены достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции, непрерывной на указанном отрезке. Доказана теорема о почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье и приведена теорема о сходимости данного ряда в точках отрезка $[-\pi, \pi]$. Рассмотрены также тригонометрические ряды Фурье в случае произвольного отрезка, симметричного относительно начала координат, и разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Приведены примеры разложения в тригонометрический ряд Фурье некоторых функций и задачи для самостоятельного решения студентами.

§ 2. Линейные пространства со скалярным произведением

О п р е д е л е н и е 1. Пусть каждой паре элементов f, g вещественного линейного пространства H поставлено в соответствие вещественное число (f, g), называемое *скалярным произведением* f и g, так, что выполнены следующие свойства (аксиомы):

1. $(f, g) = (g, h)$ (свойство симметричности скалярного произведения);

2. $(\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, g) + \mu(g, h)$ для любых элементов $f, g, h \in H$ и любых вещественных чисел λ, μ;

3. $(f, f) \geq 0$;

4. Если $(f, f) = 0$, то $f = 0$.

Тогда H называется *линейным пространством со скалярным произведением*.

Заметим, что из свойств 1 и 2 следует, что для любого $f \in H$ справедливо равенство

$$(f, 0) = 0.$$

Действительно,

$$(f, 0) = (0, f) = (0 \cdot 0, f) = 0 \cdot (0, f) = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2. Если каждой паре элементов $f, g \in H$ поставлено в соответствие вещественное число (f, g), удовлетворяющее только аксиомам 1–3, то (f, g) называется полускалярным произведением f и g, а пространство H называется *линейным пространством с полускалярным произведением*.

Т е о р е м а 1. *Пусть H – пространство с полускалярным произведением. Тогда для любых $f, g \in H$ справедливо неравенство*

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g). \tag{2.1}$$

Неравенство (2.1) называется *неравенством Коши-Буняковского*.

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу свойства 3 полускалярного произведения, для любого вещественного числа λ справедливо неравенство

$$(\lambda f + g, \lambda f + g) \geq 0. \tag{2.2}$$

Применяя свойства 1 и 2 полускалярного произведения, неравенство (2.2) можно записать в виде

$$\lambda^2(f, f) + 2\lambda(f, g) + (g, g) \geq 0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $(f, f) = 0$. Тогда

$$2\lambda(f, g) + (g, g) \geq 0. \tag{2.4}$$

Так как неравенство (2.4) должно выполняться при всех вещественных λ, то $(f, g) = 0$. Действительно, если предположить, что $(f, g) \neq 0$, то взяв

$$\lambda = -\frac{(g, g)}{(f, g)}$$

ŋqdbqye¥ bɆ deqbƎbɎɜe d ɛɔɑɓɔɏ ɟqdbɎqɏè

мы получили бы неравенство

$$(g,g) \leq 0.$$

С учетом свойства 3 скалярного произведения отсюда следует, что $(g,g) = 0$. Используя теперь неравенство (2.4) при $\lambda = -1/2$ и $\lambda = 1/2$, получим, что $(f,g) = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $(f,f) = 0$ и $(f,g) = 0$ и неравенство (2.1) справедливо, так как обе его части обращаются в нуль.

2. Пусть $(f,f) \neq 0$. Тогда из (2.3) следует, что дискриминант квадратного относительно λ трехчлена в левой части неравенства (2.3) неположителен, то есть

$$(f,g)^2 - (f,f) \cdot (g,g) \leq 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Для любых элементов f, g из линейного пространства с полускалярным произведением справедливо неравенство*

$$\sqrt{(f+g,f+g)} \leq \sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$(f+g,f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g) \leq$$
$$\leq (f,f) + 2|(f,g)| + (g,g) \leq (f,f) + 2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} + (g,g) =$$
$$= \left[\sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)}\,\right]^2,$$

откуда следует неравенство (2.5).

Если H – линейное пространство с полускалярным произведением и каждому элементу $f \in H$ поставить в соответствие вещественное число

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \tag{2.6}$$

то величина $\|f\|$ будет удовлетворять всем свойствам полунормы. Действительно, свойства 1 и 2 полунормы следуют из свойств 3 и 2 скалярного произведения, а выполнение неравенства треугольника вытекает из неравенства (2.5). Если же H является линейным пространством со скалярным произведением, то формула (2.6) задает норму в этом пространстве.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Каждое линейное пространство со скалярным (соответственно полускалярным) произведением является нормированным (соответственно полунормированным) пространством с нормой (соответственно с полунормой), определяемой формулой* (2.6).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть H – линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $f \in H$ и $g \in H$ называются *ортогональными*, если $(f,g) = 0$.

О п р е д е л е н и е 4. Система элементов $\{f_\nu, \nu \in A\}$ (A – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное)) линейного пространства H с полускалярным произведением называется *ортогональной*, если каждые ее два элемента ортогональны. Если, кроме того, норма любого ее элемента равна 1, то она называется *ортонормированной*.

Л е м м а. *Если система* $\{f_\nu, \nu \in A\}$ *элементов пространства* H *с полускалярным произведением ортогональна и* $\|f_\nu\| \neq 0$ *для всех* $\nu \in A$, *то она линейно независима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть для некоторых элементов f_{ν_k}, $\nu_k \in A$, $k = 1, \dots, m$ найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, такие, что

$$\lambda_1 f_{\nu_1} + \dots + \lambda_m f_{\nu_m} = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на f_{ν_k}, где k фиксировано $(1 \le k \le n)$. Тогда получим, что

$$\lambda_k \left(f_{\nu_k}, f_{\nu_k}\right) = 0, \tag{2.7}$$

так как в силу ортогональности системы $\left(f_{\nu_j}, f_{\nu_k}\right) = 0$ для $j \neq k$. Из условия леммы следует, что $\left(f_{\nu_k}, f_{\nu_k}\right) = \left\|f_{\nu_k}\right\|^2 \neq 0$, поэтому из (2.7) получим, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, m$. Это означает, что система $\{f_\nu, \nu \in A\}$ линейно независима. Лемма доказана.

§ 3. Примеры линейных пространств со скалярным произведением и линейных нормированных пространств

1. Пространство $\boldsymbol{R}^n$. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{R}^n$, состоящее из всевозможных упорядоченных наборов n вещественных чисел $(x_1, \dots, x_n)$. Пространство $\boldsymbol{R}^n$ носит название *n-мерного евклидова пространства.* Элементы $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ называются также *точками* или *векторами* этого пространства. Число x_i, $1 \le i \le n$ называется *i-ой координатой* точки x. Суммой элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ называется элемент

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

а произведением элемента x на число λ – элемент

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Роль нулевого элемента в $\boldsymbol{R}^n$ играет вектор $0 = (0, \dots, 0)$.

Очевидно, что для элементов пространства $\boldsymbol{R}^n$ выполнены аксиомы линейного пространства.

Базисом в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ является набор векторов $e_1 = (1,0, \dots, 0)$, $e_2 = (0,1, \dots, 0)$, … , $e_n = (0,0, \dots, 1)$. При этом для любого $x \in \boldsymbol{R}^n$ справедливо разложение

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Введем скалярное произведение элементов $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n;$$

при этом, очевидно, выполняются все аксиомы скалярного произведения. Норма элемента $x \in \boldsymbol{R}^n$ определяется по формуле