

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Х30

Электронные версии книг
на сайте www.prospekt.org

Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.

Х30 Высшая математика. Том 1 : учебное пособие / отв. ред. В. И. Антонов, Ю. Д. Максимов. — Москва : Проспект, 2015. — 584 с.

ISBN 978-5-392-12162-5

Данное учебное пособие создано на основе восьми выпусков опорного конспекта по математике, изданного в СПбГПУ в 2000—2004 гг. для общетехнических и экономических направлений, а также учебного пособия «Математика, выпуск 10», являющегося дополнением к предыдущим выпускам и содержащего выводы формул и доказательства теорем. Эти выпуски соответствуют государственным образовательным стандартам и действующим программам. Изложение теоретического материала, методы решения основных задач сопровождаются значительным количеством примеров.

Издание предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

Учебное издание

**Лобкова Наталья Ивановна,
Максимов Юрий Дмитриевич,
Хватов Юрий Алексеевич**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ТОМ 1**

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен компанией ООО «Оригинал-макет»

www.o-maket.ru; тел.: (495) 726-18-84

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.60.953.Д.004173.04.09 от 17.04.2009 г.

Подписано в печать 20.08.2014. Формат 60×90 ¹/₁₆.

Печать цифровая. Печ. л. 36,5. Тираж 100 экз. Заказ №

ООО «Проспект»

111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 7, стр. 4.

ISBN 978-5-392-12162-5

© Коллектив авторов, 2014
© ООО «Проспект», 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение к курсу математики	5

Раздел 1. Линейная алгебра

Глава 1. Определители, матрицы и системы линейных алгебраических уравнений.....	9
§ 1. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Метод Гаусса.....	9
§ 2. Определители 2-го и 3-го порядков.....	18
§ 3. Определители высших порядков	27
Глава 2. Матрицы и действия с ними	36
§ 1. Линейные операции с матрицами и их свойства.....	36
§ 2. Операция умножения матриц и ее свойства	39
§ 3. Операция транспонирования матриц и ее свойства	42
§ 4. Обратная матрица	43
§ 5. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы	49
Глава 3. Общая теория систем линейных алгебраических уравнений	53
§ 1. Крамеровские системы линейных алгебраических уравнений.....	53
§ 2. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений.....	58
§ 3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений.....	68

Раздел 2. Векторная алгебра

Глава 1. Линейные операции над векторами.....	75
§ 1. Понятие вектора. Равные векторы. Коллинеарные и компланарные векторы	75
§ 2. Операция сложения векторов и ее свойства	76
§ 3. Операция умножения вектора на число и ее свойства	79
§ 4. Понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов	81
§ 5. Геометрический смысл линейной зависимости векторов	83
§ 6. Базис и координаты вектора. Прямоугольная декартова система координат.....	87
§ 7. Полярная система координат.....	93
§ 8. Задача о делении отрезка в данном отношении	96
Глава 2. Операции умножения векторов.....	99
§ 1. Проекция вектора на ось и ее свойства.....	99

§ 2. Скалярное произведение двух векторов.....	102
§ 3. Векторное произведение двух векторов.....	106
§ 4. Смешанное произведение трех векторов.....	110
§ 5. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных разложениями в прямоугольном базисе	114
§ 6. Преобразование прямоугольных координат на плоскости	118

Раздел 3. Аналитическая геометрия

Глава 1. Геометрия прямых и плоскостей	124
§ 1. Понятие об уравнении плоской линии. Алгебраические линии. Теорема об инвариантности порядка.....	124
§ 2. Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.....	127
§ 3. Различные виды уравнений прямой на плоскости	129
§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми.....	134
§ 5. Расстояние от точки до прямой на плоскости	136
§ 6. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности. Теорема об инвариантности порядка.....	137
§ 7. Плоскость как поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.....	139
§ 8. Расстояние от точки до плоскости.....	143
§ 9. Уравнения линии в пространстве	143
§ 10. Различные виды уравнений прямой в пространстве.....	147
§ 11. Взаимное расположение прямой и плоскости	152
Глава 2. Кривые второго порядка.....	155
§ 1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка	155
§ 2. Эллипс и его свойства	156
§ 3. Гипербола и ее свойства.....	162
§ 4. Парабола и ее свойства.....	168
Глава 3. Поверхности второго порядка	173
§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка	173
§ 2. Эллипсоид	174
§ 3. Гиперболоиды.....	175

§ 4. Конус второго порядка	177
§ 5. Параболоиды	178
§ 6. Цилиндры второго порядка	180
§ 7. Поверхности вращения второго порядка	181

Раздел 4. Введение в математический анализ

Глава 1. Множества и функции	187
§ 1. Множества и операции над ними	187
§ 2. Логические символы. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия	189
§ 3. Понятие вещественного числа. Множество вещественных чисел R и его свойства	190
§ 4. Некоторые подмножества из R	192
§ 5. Модуль вещественного числа и его свойства	193
§ 6. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Точные грани числовых множеств	195
§ 7. Понятие числовой функции. График функции. Способы задания функции. Классификация функций	196
§ 8. Элементарные функции	200
§ 9. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли	206
§ 10. Символ суммирования. Факториал. Бином Ньютона	207
Глава 2. Предел числовой последовательности	209
§ 1. Числовая последовательность. Классификация последовательностей	209
§ 2. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности	210
§ 3. Свойства сходящихся последовательностей	211
§ 4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства	215
§ 5. Достаточный признак существования предела числовой последовательности. Число e . Натуральные логарифмы	219
Глава 3. Предел функции	221
§ 1. Два определения предела функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности	221
§ 2. Свойства пределов функций	225
§ 3. Замечательные пределы	227
§ 4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	229
§ 5. Неопределенности. Вычисление пределов степенно-показательных функций	232

§ 6. Сравнение бесконечно малых функций. Символ « o » и его свойства.....	237
§ 7. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства. Главная часть бесконечно малой функции	240
*§ 8. Сравнение бесконечно больших функций	244
*§ 9. Асимптотическое представление бесконечно малых и бесконечно больших функций	247
§ 10. Гиперболические функции	251
Глава 4. Непрерывность функции	254
§ 1. Понятие функции, непрерывной в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность функции на промежутке.....	254
§ 2. Классификация точек разрыва непрерывности	256
§ 3. Свойства функций, непрерывных в точке.....	258
§ 4. Свойства функций, непрерывных на отрезке	259
§ 5. Непрерывность элементарных функций	261
Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	
Глава 1. Производная и дифференциал	268
§ 1. Производная функции в точке. Односторонние и бесконечные производные.....	268
§ 2. Геометрический и механический смысл производной.....	270
§ 3. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал	272
§ 4. Геометрический и механический смысл дифференциала	275
§ 5. Правила дифференцирования.....	276
§ 6. Производная сложной и обратной функции. Свойство инвариантности формы дифференциала.....	278
§ 7. Производные основных элементарных функций. Таблица производных	280
§ 8. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически	287
§ 9. Производные высших порядков	290
§ 10. Вычисление производных высших порядков от функций, заданных неявно и параметрически.....	294
§ 11. Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности формы	295
Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления.....	298
§ 1. Определение экстремума. Теорема Ферма	298
§ 2. Теорема Ролля	299
§ 3. Теорема Коши	301
§ 4. Теорема Лагранжа	303

§ 5. Правило Лопитала	307
§ 6. Формула Тейлора для многочлена. Бином Ньютона как частный случай формулы Тейлора для многочлена	311
§ 7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	315
§ 8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа	321
Глава 3. Исследование функций и построение графиков	325
§ 1. Условие постоянства функции на промежутке	325
§ 2. Достаточный признак строгой монотонности функции на промежутке	325
§ 3. Необходимые условия существования экстремума. Критические точки	326
§ 4. Достаточные условия существования экстремума	328
§ 5. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции	332
§ 6. Асимптоты графика функции	336
§ 7. Общий план исследования функции и построение ее графика	340
§ 8. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке	348

Раздел 6. Комплексные числа. Алгебраические многочлены и рациональные алгебраические дроби

Глава 1. Комплексные числа	355
§ 1. Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме	355
§ 2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа	359
§ 3. Действия с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме	362
§ 4. Операция сопряжения. Ее свойства	366
§ 5. Комплексная степень числа e . Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа	367
§ 6. Логарифм комплексного числа	368
§ 7. Понятие функции комплексной переменной	369
Глава 2. Алгебраические многочлены и рациональные алгебраические дроби	372
§ 1. Условие тождественного равенства двух многочленов	372
§ 2. Разложение алгебраического многочлена на линейные множители. Число корней многочлена	373

§ 3. Понятие кратного корня. Признак кратности корня.....	375
§ 4. Вещественные алгебраические многочлены и их разложение на неприводимые множители на множестве вещественных чисел.....	377
§ 5. Рациональные алгебраические дроби. Основные понятия.....	380
§ 6. Теорема о разложении правильной рациональной алгебраической дроби на простейшие дроби.....	381
 Раздел 7. Интегральное исчисление функций одной переменной	
Глава 1. Первообразная и неопределенный интеграл.....	386
§ 1. Первообразная. Неопределенный интеграл.....	386
§ 2. Свойства неопределенного интеграла	389
§ 3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.....	391
§ 4. Замена переменной в неопределенном интеграле	392
Глава 2. Интегрирование основных классов элементарных функций	396
§ 1. Интегрирование рациональных функций	396
§ 2. Интегрирование функций, зависящих рационально от синуса и косинуса	402
§ 3. Интегрирование иррациональных функций	407
§ 4. Понятие о неберущихся интегралах	413
Глава 3. Определенный интеграл, его свойства и методы вычисления	414
§ 1. Понятие определенного интеграла, его физический и геометрический смысл. Необходимое и достаточные условия интегрируемости	414
§ 2. Свойства определенного интеграла	420
§ 3. Теоремы о среднем для определенного интеграла. Среднее значение функции на промежутке.....	426
§ 4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона — Лейбница.....	429
§ 5. Интегрирование по частям в определенном интеграле	432
§ 6. Замена переменной в определенном интеграле	433
§ 7. Метод трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла	436
Глава 4. Несобственные интегралы.....	439
§ 1. Интегралы по бесконечному промежутку (несобственные интегралы 1-го рода).....	439

§ 2. Простейшие свойства несобственных интегралов 1-го рода.....	441
*§ 3. Признаки сходимости для несобственных интегралов с бесконечными пределами от неотрицательных функций.....	444
*§ 4. Абсолютная и неабсолютная (условная) сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами.....	449
§ 5. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).....	452
§ 6. Свойства несобственных интегралов 2-го рода.....	454
*§ 7. Гамма-функция (интеграл Эйлера 2-го рода).....	457
*§ 8. Бета-функция (интеграл Эйлера 1-го рода).....	461
Глава 5. Геометрические приложения определенного интеграла.....	464
§ 1. Вычисление площади фигуры в прямоугольных декартовых координатах.....	464
§ 2. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах.....	465
§ 3. Вычисление объема тела через площади его сечений.....	468
§ 4. Вычисление длины дуги кривой.....	472
§ 5. Площадь поверхности тела вращения.....	476
Глава 6. Приложения определенного интеграла к решению физических задач.....	481
§ 1. Методика применения определенного интеграла к решению практических задач.....	481
§ 2. Работа переменной силы.....	482
§ 3. Давление на пластинку, погруженную вертикально в жидкость.....	483
§ 4. Моменты. Центр масс плоских фигур.....	484
§ 5. Расход воды через отверстие в стенке резервуара.....	487
§ 6. Приложение определенного интеграла к экономическим задачам.....	488
Глава 7. Элементы дифференциальной геометрии.....	490
§ 1. Вектор-функция скалярного аргумента.....	490
§ 2. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой.....	493
§ 3. Кривизна плоской кривой, радиус и окружность кривизны.....	494
§ 4. Эволюта, эвольвента.....	501

Раздел 8. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Глава 1. Понятие функции нескольких переменных. Предел.	
Непрерывность	509
§ 1. Пространство R_m и некоторые его подмножества.....	509
§ 2. Открытые, связные, замкнутые, ограниченные множества в пространстве R_m	510
§ 3. Понятие функции нескольких переменных.....	512
§ 4. Предел функции нескольких переменных	514
§ 5. Непрерывность функции в точке и в области. Разрывы непрерывности	516
Глава 2. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных, их приложения	519
§ 1. Частные производные.....	519
§ 2. Частные производные высших порядков.....	520
§ 3. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал.....	521
§ 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.....	527
§ 5. Производная по направлению. Градиент.....	530
§ 6. Производные сложной функции. Инвариантность формы полного дифференциала. Формулы для вычисления дифференциалов.....	533
§ 7. Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности формы	537
*§ 8. Формула Тейлора.....	541
Глава 3. неявные функции	544
§ 1. неявные функции, определяемые одним уравнением. Теорема существования. Вычисление производных	544
§ 2. неявные функции, определяемые системой уравнений. Теорема существования. Вычисление производных	550
Глава 4. Экстремумы функции нескольких переменных.....	554
§ 1. Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимые условия существования экстремума	554
§ 2. Достаточные условия существования экстремума. Случай функции двух переменных.....	556
§ 3. Условные экстремумы.....	559
§ 4. Отыскание наибольших и наименьших значений функции.....	569