РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3 ИЮЛЬ СЕНТЯБРЬ

том 18 2015

НОВОСИБИРСК

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Т. 18 № 3	СибЖВМ Научный журнал	2015 июль–сентябрь

Основан в феврале 1998 г. Выходит 4 раза в год

Учредители:
Сибирское отделение РАН
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Научные направления журнала: теория и практика вычислительных методов математики, математической физики и других прикладных областей; математические модели теории упругости, гидродинамики, газовой динамики и геофизики; распараллеливание алгоритмов; модели и методы биоинформатики.

Журнал реферируется в «SCOPUS», «Zentralblatt Math», «Academic OneFile», «SCImago», «NA DIGEST», «EI-Compendex», «Expanded Academic», «Google Scholar», «OCLC», «Springer», «Summon by ProQuest».

Начиная с 2008 г. журнал переводится на английский язык и издается издательством «Springer» под названием «Numerical Analysis and Applications».

Правила представления рукописей: рукописи, предназначенные для публикации в журнале, должны быть посланы в адрес редакции в двух экземплярах, написаны на русском или английском языках объемом не более 14 с., размер текста на странице 225x155 мм, шрифт 11 pt. Статьи должны быть также представлены в электронной форме (файл PDF, файл в LaTeX-е со вставленными рисунками в форматах: PNG или PCX, или BMP, или EPS, или CDR). К статье должны быть приложены: заключение экспертного совета, английское название статьи и транслитерация фамилий авторов (для русскоязычной публикации), аннотации на русском и английском языках, код(ы) классификации УДК, ключевые слова и фразы и полная информация об авторах, а также заполненный бланк Договора о передаче авторских прав с электронной подписью без указания номера, тома и года выхода публикации. Публикации статей бесплатны для всех. *Электронные версии статей могут быть присланы по электронной почте.*

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Адрес редакции: Редакция СибЖВМ, ИВМиМГ СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия.
Тел.: (383)330-87-27. Факс: (383)330-87-83.
E-mail: sibjnm@sscc.ru
http://www.sscc.ru/SibJNM

Содержание

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2015. Т. 18, № 3

УДК 514.7+517.98+519.61

Томография бессиловых полей

А.Л. Баландин

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033
E-mail: balandin@icc.ru

Баландин А.Л. Томография бессиловых полей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 237–253.

Для исследования бессиловых полей предложено использовать методы вычислительной томографии. Для обращения лучевого преобразования разработан метод мультипольного разложения. Метод основан на разложении векторного поля и лучевого преобразования по специальным базисным векторным функциям. Приведены аналитические выражения лучевого преобразования базисных векторных функций и представлены результаты численного моделирования.

DOI: 10.15372/SJNM20150301

Ключевые слова: *вычислительная томография, сферические гармоники, обратные задачи.*

Balandin A.L. Tomography of force-free fields // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 3. — P. 237–253.

In order to investigate the force-free fields it is proposed to use the computerized tomography methods. For the inversion of the ray transformation, the method of multipole fields expansion has been developed. This method is based on the expansion of a vector field and the ray transformation over the special basis of vector-functions. Analytical expressions for the ray transform of the basis vector-functions and the results of computer simulation are given.

Keywords: *computerized tomography, spherical harmonics, inverse problems.*

1. Введение

В астрофизике [1, 2], в физике плазмы [3, 4], в задачах гидродинамики [5, 6] важную роль играют так называемые бессиловые поля. Теория и множество приложений бессиловых полей описаны в книге [7]. Бессиловые магнитные поля удовлетворяют условию, что магнитное поле в некоторой области везде параллельно вектору плотности тока, т. е. $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = 0$. Аналогом магнитным бессиловым полям в гидродинамике является поля, удовлетворяющие условию

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \Omega \boldsymbol{V},$$

где $\boldsymbol{V}$ — скорость среды. Решения этого уравнения, когда Ω есть функция координат, известны как поля Бельтрами (Beltrami); решения, когда Ω — постоянная величина, являются полями Тркалиан (Trkalian). Таким образом, существует аналогия между скоростью $\boldsymbol{V}$ и магнитным полем $\boldsymbol{B}$, а также между завихренностью $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ и вектором плотности тока $\boldsymbol{J}$. В работе предполагается разработка томографических методов диагностики таких полей применительно к задачам физики плазмы, возможно также применение этих методов для исследования Солнечной короны.

Проблема трёхмерной (3D) векторной томографии заключается в реконструкции неизвестного векторного поля в ограниченной области по известному лучевому преобразованию. Методы векторной томографии широко используются для исследования физических объектов. Например, проблемы восстановления распределения поля скоростей и магнитного поля в физике плазмы рассматривались в [8, 9], использование ультразвуковых время-пролётных измерений в жидкостно-подобных средах для определения поля скоростей свидетельствует о возможностях векторной томографии в исследовании физических сред [10]. Другую информацию о приложениях и дополнительные ссылки по векторный томографии можно найти в работах [11–15]. В отличие от скалярной томографии задача векторной томографии не имеет единственного решения, так как ядро лучевого преобразования содержит потенциальные поля с нулевыми граничными значениями. Поэтому невозможно восстановить потенциальную составляющую векторного поля, используя только результаты лучевого преобразования, а восстанавливается только соленоидальная компонента. Достаточно эффективным методом для решения этой задачи является метод мультипольного разложения, когда векторное поле и лучевое преобразование разлагаются по определённым базисным функциям. При этом удобно выбрать такую систему базисных векторных функций, что все компоненты и любые линейные комбинации из этих компонент преобразовывались бы при повороте системы координат единым образом. Такому условию удовлетворяет, например, совокупность $2l+1$ сферических функций Y_{lm}; $m=-l,\dots,l$. Совокупность $2l+1$ величин, которые при вращении системы координат преобразуются так же, как сферические функции Y_{lm}, называются сферическими тензорами или тензорными сферическими гармониками [16]. Простейшим примером такого сферического тензорного оператора (неприводимого тензорного оператора) являются функции $f(r)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol r})$, где $f(r)$ — произвольная функция r, $\hat{\boldsymbol r}=\dfrac{\boldsymbol r}{r}$. Хотя векторные сферические гармоники решают проблему разложения произвольного векторного поля [17–19], например, в задачах диагностики плазмы в качестве базисных векторных функций удобнее использовать векторы Хансена $\boldsymbol M_l^m, \boldsymbol N_l^m, \boldsymbol L_l^m$ (Hansen multipole fields) [20, 21], так как поля скоростей и магнитные поля, как правило, удовлетворяют условию соленоидальности. Векторы $\boldsymbol M_l^m, \boldsymbol N_l^m$, как видно из определения (9), являются соленоидальными векторами и, следовательно, формируют соленоидальный базис для векторных полей.

Векторное поле $\boldsymbol g(\boldsymbol r)$, подлежащее определению, рассматривается в системе координат $\mathcal S(\boldsymbol e_x,\boldsymbol e_y,\boldsymbol e_z)$ в евклидовом пространстве $\mathbb R^3$ с координатами $\boldsymbol r=(x,y,z)$. В системе координат регистрации проекционных данных S' векторное поле имеет вид $\boldsymbol g'(\boldsymbol r')$, $\boldsymbol r'=\mathcal R\boldsymbol r$. С помощью матрицы вращения $\mathcal R$ система координат S переводится в систему координат S'. Векторное поле при этом преобразуется следующим образом:

$$\boldsymbol g'(\boldsymbol r')=\mathcal R\boldsymbol g(\boldsymbol r)=\mathcal R\boldsymbol g(\mathcal R^{-1}\boldsymbol r') \quad \text{или в виде} \quad \boldsymbol g'(\boldsymbol r)=\mathcal R\boldsymbol g(\mathcal R^{-1}\boldsymbol r).$$

Для произвольного вращения, определяемого положительными углами Эйлера (α,β,γ), матрица вращения $\mathcal R$ записывается в виде

$$\mathcal R=\left(\begin{array}{c|c|c} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{array}\right),$$
$$0\leqslant\alpha<2\pi,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\gamma<2\pi. \tag{1}$$

Статья состоит из семи пунктов и приложения. Во введении кратко описана постановка задачи и используемый инструмент для её решения. Определение и представление бессилового поля даны в п. 2. В третьем пункте приводятся определение лучевого преобразования и теорема о центральном сечении для векторных полей. В четвёртом и пятом пунктах вводятся определения векторов Хансена, вычисляются их трёхмерные преобразования Фурье и получены аналитические выражения лучевого преобразования для векторов Хансена. Результат численного моделирования представлен в шестом пункте. В приложении приведены некоторые вспомогательные данные.