

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

Л89

А

Рукопись подготовлена в рамках грантового проекта НИУ ВШЭ
по изданию авторских учебников

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
В. И. Богачев

Л89 **Львовский, Сергей Михайлович.**

Основы математического анализа / С. М. Львовский ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — 2-е изд., эл. — 1 файл pdf : 370 с. — Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. — (Учебники Высшей школы экономики). — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-7598-2405-3

В основе этого продвинутого учебника по математическому анализу — курс, который читался автором на факультете математики Высшей школы экономики. Представленный в книге материал имеет ряд отличий от традиционных курсов. Так, ряды вводятся сразу же после определения предела последовательности; в книгу входит экскурс в элементарную теорию множеств (включая лемму Цорна и ее применения) и в общую топологию (включая канторово множество и p -адические числа). Заметное место в учебнике уделено анализу на многообразиях, включая дифференциальные формы, теорему Стокса и теорему Фробениуса.

Учебник будет полезен студентам младших курсов математических специальностей, преподавателям математики, а также всем интересующимся этой наукой.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

Электронное издание на основе печатного издания: Основы математического анализа / С. М. Львовский ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2021. — 368 с. — (Учебники Высшей школы экономики). — ISBN 978-5-7598-1183-1. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-7598-2405-3

© Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», 2021

А

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава 1. Введение в анализ.	9
1.1. Предел последовательности	9
1.2. Множества.	14
1.3. Множества (продолжение)	20
1.4. Некоторые классические пределы	24
1.5. Ряды.	31
1.6. Построение действительных чисел	39
1.7. Свойства полноты действительных чисел	45
1.8. Некоторые следствия из свойств полноты	48
1.9. Ряды с произвольными членами.	53
1.10. Упражнения	56
Глава 2. Производная; элементарные функции	63
2.1. Определение и простейшие свойства производных.	63
2.1.1. Предел функции.	63
2.1.2. Производная	66
2.2. Непрерывные функции	71
2.3. Степень с рациональным показателем, экспонента, логарифм	74
2.4. Исследование функций с помощью производной	82
2.5. Тригонометрия.	85
2.6. Вторая производная и выпуклость	91
2.7. Символы o и O , теорема о среднем, формула Тейлора	95
2.8. Нахождение пределов	107
2.9. Упражнения	111
Глава 3. Элементарные понятия топологии	115
3.1. Отношения и лемма Цорна.	115
3.2. Топологические пространства.	121
3.3. Непрерывность и пределы	129
3.3.1. Пределы и непрерывность в метрических пространствах	130
3.3.2. Общее определение предела	134
3.4. Компактность	135
3.5. Связность.	143
3.6. Полнота и пополнение	148
3.7. p -адические числа и канторово множество	151
3.8. Канторово множество	156
3.9. Упражнения	163

Глава 4. Интеграл	167
4.1. Равномерная сходимость; равномерная непрерывность	167
4.2. Интеграл от кусочно-непрерывной функции	171
4.3. Неопределенный интеграл	179
4.4. Некоторые классы функций, интегралы которых — также элементарные функции	183
4.5. Почленное дифференцирование	189
4.6. Несобственные интегралы	192
4.7. Упражнения	198
Глава 5. Функциональные ряды	202
5.1. Равномерная и нормальная сходимости	202
5.2. Аналитические функции	209
5.3. Разложение элементарных функций в ряды	219
5.4. Теорема Стоуна–Вейерштрасса	226
5.5. Упражнения	232
Глава 6. Кратные интегралы	234
6.1. Определение кратного интеграла	234
6.2. Интегралы по открытым подмножествам	240
6.3. Упражнения	247
Глава 7. Дифференцирование функций нескольких переменных	249
7.1. Конечномерные нормированные пространства	249
7.2. Производная в многомерном случае	251
7.3. Высшие производные	256
7.4. Исследование функций на экстремум	259
7.5. Упражнения	261
Глава 8. Теоремы о неявной и обратной функциях и их приложения	264
8.1. Теорема об обратной функции	264
8.2. Теорема о неявной функции	268
8.3. Замена переменной в определенном интеграле	274
8.4. Упражнения	280
Глава 9. Абстрактные многообразия и векторные поля	282
9.1. Абстрактные многообразия	282
9.2. Касательные пространства	285
9.3. Векторные поля: алгебра	291
9.4. Теорема Арцелы–Асколи и дифференциальные уравнения	302
9.5. Векторные поля: геометрия	308
9.6. Упражнения	313

Глава 10. Дифференциальные формы и интегрирование на многообразиях	316
10.1. Интегрирование плотностей	316
10.1.1. Разбиение единицы	318
10.2. Дифференциальные формы	321
10.2.1. Формы степени 1	321
10.2.2. Интегрирование 1-форм	323
10.2.3. Немного линейной алгебры	326
10.2.4. Формы произвольной степени	327
10.3. Неформальная формулировка теоремы Стокса	331
10.4. Интегрирование форм по многообразиям	332
10.4.1. Ориентация многообразия	332
10.4.2. Многообразия с краем	337
10.4.3. Теорема Стокса	338
10.5. Классический векторный анализ	340
10.6. Сингулярные симплексы	346
10.7. Понятие о когомологиях де Рама	350
10.8. Теорема Фробениуса	354
10.9. Упражнения	360
Предметный указатель	364