УДК 51+53

DOI: 10.22227/2305-5502.2017.3.1

АППРОКСИМАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАРЛЕМАНА

С.А. Духновский

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются свойства аппроксимационного решения уравнения Карлемана. Решение задачи Коши с периодическими начальными данными найдено для малых возмущений состояния равновесия. Приведены теорема существования глобального решения уравнения Карлемана, а также теорема существования нелинейного уравнения, которое получается из исходного кинетического уравнения. Доказано, что аппроксимационное решение слабо сходится к исходному решению уравнения Карлемана. Предположено, что решение задачи Коши распадается на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающую дисперсионную волну.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение Карлемана, нелинейное гиперболическое уравнение, Гильбертово пространство, задача Коши, слабое решение

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Духновский С.А. Аппроксимационное решение кинетической системы Карлемана // Строительство: наука и образование. 2017. Т. 7. Вып. 3 (24). Ст. 1. Режим доступа: http://nso-journal.ru.

AN APPROXIMATION SOLUTION OF THE KINETIC CARLEMAN SYSTEM

S.A. Dukhnovskiy

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

ABSTRACT. The properties of approximation solutions of the Carleman equation are discussed in this paper. A solution of the Cauchy problem with periodic initial data is obtained for small perturbations of the equilibrium state. The theorem of existence of a global solution of the Carleman equation as well as the theorem of nonlinear equation existence obtained by the kinetic Carleman equation has been brought over. It has been proved that the approximation solution converges weakly to the original solution of the Carleman equation. It is assumed that the solutions of the Cauchy problem split into the superposition of weakly interacting solitons and decreasing dispersion wave.

KEY WORDS: Carleman equation, nonlinear hyperbolic equation, Hilbert space, Cauchy problem, weak solution

FOR CITATION: Dukhnovskiy S.A. Approksimatsionnoe reshenie kineticheskoy sistemy Karlemana [An Approximation Solution of the Kinetic Carleman System]. Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie [Construction: Science and Education]. 2017, vol. 7, issue 3 (24), paper 1. Available at: http://nso-journal.ru. (In Russian)

Исследуем дискретное уравнение Карлемана [1–10], которое является частным случаем уравнения Больцмана:

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2),\ t>0,\ x\in R^1, \\ &\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2), \end{aligned} \tag{1}$$

с периодическими начальными условиями

$$\begin{aligned} &u|_{t=0} = u^0(x),\ w|_{t=0} = w^0(x), \\ &u^0(x) = u^0(x+2\pi),\ w^0(x) = w^0(x+2\pi). \end{aligned} \tag{2}$$

где $u(x,t)$, $w(x,t)$ — плотности частиц, одна из которых движется с единичной скоростью вдоль оси Оx в положительном направлении, другая — в противоположном, а параметр ε является аналогом свободного пробега частицы.

Уравнение Карлемана (1) описывает смесь процессов: релаксацию и свободное движение. Суть релаксации заключается в распространении частиц в разных направлениях. Уравнение Карлемана является частным случаем дискретного уравнения Больцмана. В течение десятков лет исследований уравнения Больцмана было найдено лишь несколько точных решений этого уравнения. Изучение свойств системы Карлемана и поиск ее решений позволяет исследовать более сложные модели, такие как система Годунова—Султангазина [5–6] и Бродуэлла [11–13] для трех и четырех частиц соответственно. Многие авторы провели численное исследование уравнения Карлемана и численно исследовали математическое ожидание, дисперсию и другие характеристики системных решений Карлемана.

Будем решать нашу задачу в весовых пространствах $W^1_{2,\gamma}\left(R_+;H_\sigma\right), L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma\right), H_\sigma$, с соответствующими нормами

$$\|\hat{u}\|_{W^1_{2,\gamma}(R_+;H_\sigma)}=\left\|\frac{d}{dt}\hat{u}\right\|_{L_{2,\gamma}(R_+;H_{\sigma-1})}+\|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+;H_\sigma)},$$

$$\|\hat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+;H_\sigma)}=\int\limits_0^{+\infty}e^{2\gamma t}\left|u_0(t)\right|^2dt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}e^{2\gamma t}\sum_{k\in Z_0}|k|^{2\sigma}\left|u_k(t)\right|^2dt,$$

$$\|\hat{u}\|^2_{H_\sigma}=\left|u_0\right|^2+\sum_{k\in Z_0}|k|^{2\sigma}\left|u_k\right|^2.$$

Ищем решение системы (1)–(2) в виде

$$u=u_e+\varepsilon^2(w_e)^{1/2}\hat{u},\, w=w_e+\varepsilon^2(w_e)^{1/2}\hat{w}, \tag{3}$$

где $u_e=w_e$ — состояние равновесия; $\hat{u}(x,t)$, $\hat{w}(x,t)$ — ряды Фурье.

Подставляя выражение (3) в (1) и (2), получим систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned}&\partial_t\hat{u}+\partial_x\hat{u}-\frac{2}{\varepsilon}w_e(\hat{w}-\hat{u})=\varepsilon w_e^{1/2}(\hat{w}^2-\hat{u}^2),\\&\partial_t\hat{w}-\partial_x\hat{w}+\frac{2}{\varepsilon}w_e(\hat{w}-\hat{u})=-\varepsilon w_e^{1/2}(\hat{w}^2-\hat{u}^2),\end{aligned} \tag{4}$$

с периодическими начальными условиями

$$u\,|_{t=0}=\hat{u}^0(x),\; w\,|_{t=0}=\hat{w}^0(x).$$

Теорема 1. Существуют постоянные $\gamma=\varepsilon\mu_0$, $\mu_0\in(0,1)$, $q\in(0,1)$, такие, что для периодических начальных условий $\left(\hat{u}^0,\hat{w}^0\right)$ с нулевыми средними и ограниченной нормой

$$\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma}\right)\le\varepsilon^2q, \tag{5}$$

для $\sigma>3/2$ существует глобальное решение $\hat{u}(x,t),\ \hat{w}(x,t)\in W^1_{2,\gamma}\left(R_+;H_\sigma\right)$ задачи Коши (4).

В работах [5, 10, 11] система уравнений Карлемана сводится к нелинейному уравнению в Гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m)}\right)$:

$$\begin{aligned}z_k^{(m)}&=e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}F_k^{(m)}(t)+\varepsilon w_e^{1/2}G_k^{(m)}(t)+\\&+\varepsilon w_e^{1/2}\left(4L_k^B\left(T_k^{-1}\left(z_k^{(m)}\right)\right)+\right.\\&+2L_k^{(m)}\left(T_k^{-1}\left(z_k^{(m)}\right)\right)+\\&+4B_k^{(m)}\left(T_k^{-1}\left(z_k^{(m)}\right),T_k^{-1}\left(z_k^{(m)}\right)\right)-\\&\left.-\varepsilon w_e^{1/2}T_k^{add}\left(Q_k^{(m)}T_k^{-1}\left(e^{-ikt}\right)+T_k^{-1}\left(z_k^{(m)}\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть $\sigma>3/2$. Тогда существует единственное решение $Z^{(m)}\in L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m)}\right)$ нелинейного уравнения (6), если

$$\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\le\varepsilon^2q,\,q\in(0,1), \tag{7}$$

для которого выполняется неравенство

$$\left\|Z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m)}\right)}\le\frac{c_{1,\sigma}}{\varepsilon^{1/2}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right). \tag{8}$$

Теорема 3. Последовательность аппроксимационных решений

$$\begin{aligned}\hat{u}^{(m)}(x,t)&=u_0^{(m)}(t)+\sum_{k\in Z_0,|k|\le m}u_k^{(m)}(t)e^{ikx},\\\hat{w}^{(m)}(x,t)&=w_0^{(m)}(t)+\sum_{k\in Z_0,|k|\le m}w_k^{(m)}(t)e^{ikx},\end{aligned} \tag{9}$$

фундаментальна по норме Гильбертова пространства $W^1_{2,\gamma}\left(R_+;H_\sigma\right)$. Более того, она стремится к слабому решению $\hat{u}(x,t),\ \hat{w}(x,t)$ задачи Коши (4):

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\hat{u}\left(\partial_t+\partial_x\right)\varphi(t,x)+2w_e\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\hat{w}-\hat{u}\right)\varphi(t,x)-\\-\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\hat{u}^2-\hat{w}^2\right)\varphi(t,x)\end{pmatrix}dtdx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}^0\,\varphi(t,x)\big|_{t=0}\,dx=0,$$

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\hat{w}\left(\partial_t-\partial_x\right)\psi(t,x)-2w_e\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\hat{w}-\hat{u}\right)\psi(t,x)+\\+\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\hat{u}^2-\hat{w}^2\right)\psi(t,x)\end{pmatrix}dtdx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{w}^0\,\psi(t,x)\big|_{t=0}\,dx=0$$

для любых пробных функций $\varphi,\psi\in C_0^\infty\left(R_+\times R^1\right)$.

Теорема 4. Последовательность

$$Z^{(m)}=\left\{z_k^{(m)},|k|\le m,k\ne 0\right\}$$

является фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m)}\right)$ и $\lim\limits_{m\to\infty}Z^{(m)}=Z.$

Рассмотрим разность нелинейных уравнений (6) с разными индексами $m_2>m_1$ при $|k|\le m_1$ в $L_{2,\gamma}\left(R_+\right)$:

$$\begin{aligned}&\left\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}\le\\&\le\left\|e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\left(F_k^{(m_2)}(t)-F_k^{(m_1)}(t)\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\\&+\varepsilon^2w_e\left\|G_k^{(m_2)}(t)-G_k^{(m_1)}(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\\&+\varepsilon^2w_e\left\{4\left\|L_k^B\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right)-T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right)\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\right.\\&+4\left\|L_k^{(m_2)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right)\right)-L_k^{(m_1)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right)\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\\&+16\left\|\begin{matrix}B_k^{(m_2)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right),T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right)\right)-\\-B_k^{(m_1)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right),T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right)\right)\end{matrix}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\\&+\left\|T_k^{add}\left(Q_k^{(m_2)}T_k^{-1}\left(e^{-ikt}\right)+T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right)\right)-\right.\\&\left.\left.-T_k^{add}\left(Q_k^{(m_1)}T_k^{-1}\left(e^{-ikt}\right)+T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right)\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}.\right.\end{aligned} \tag{10}$$

Умножим вышеуказанное неравенство на $|j|^{2\sigma}$ и возьмем супремум. Оценим, например, разность билинейных форм. Остальные выражения оцениваются аналогично. Имеем

$$J=\varepsilon^2 w_e \sup_{k\in Z_0,|k|\le m_1}|k|^{2\sigma}\Big\|B_k^{(m_2)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right),T_k^{-1}\left(Z^{(m_2)}\right)\right)-$$

$$-B_k^{(m_1)}\left(T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right),T_k^{-1}\left(Z^{(m_1)}\right)\right)\Big\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}=$$

$$=\varepsilon^2 w_e \sup_{k\in Z_0,|k|\le m_1}|k|^{2\sigma}\Bigg\|\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_2} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right)-$$

$$-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_1)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_1)}\right)\right)\Bigg\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}. \qquad (11)$$

Заметим, что сумму при m_2 можно расписать следующим образом:

$$\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_2} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_2,\\ \max(|k_1|,\,|k_2|)>m_1}} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right).$$

Применяем данное выражение к выражению (11), а также добавим и вычтем обратный оператор $T_k^{-1}\left(z_k{}^{(m)}\right)$ в подынтегральных выражениях для того, чтобы оценка выражалась через разность:

$$J=\varepsilon^2 w_e \sup_{k\in Z_0,|k|\le m_1}|k|^{2\sigma}$$

$$\Bigg\|\sum_{\substack{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_2,\\ \max(|k_1|,\,|k_2|)>m_1}} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\right)-$$

$$-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1} ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\times$$

$$\times\left(ik_1\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_1)}-z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds- \\ -T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_1)}-z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\end{matrix}\right)\Bigg\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Расписывая норму и внося супремум под знак интеграла, получаем одно из выражений типа

$$J_1=\int_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1}\frac{1}{|k_2|^\sigma}ik_2\int_0^t e^{ik_2(s-t)}|k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}\times$$

$$\times\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\times$$

$$\times\sup_{k_1\in Z_0,|k_1|\le m_1}|k_1|^\sigma\left(ik_1\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\times \\ \times\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds-T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\end{matrix}\right)^2 dt.$$

Другие оцениваются аналогично. Здесь мы умножили и разделили на $|k_2|^\sigma$ для получения нормы. Далее выносим из-под суммы супремум выражения, зависящего от параметра k_2 тогда имеем

$$J_1=\sup_t\sup_{k_1\in Z_0,|k_2|\le m_1}\left|i\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_2(s-t)}|k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}\times \\ \times\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\end{matrix}\right|^2\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{2\gamma t}\left|\sup_{k_1\in Z_0,|k_1|\le m_1}|k_1|^\sigma\left(ik_1\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds- \\ -T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\end{matrix}\right)\right|^2 dt\times$$

$$\times\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,\,|k_2|\le m_1}\frac{k_2{}^2}{|k_2|^{2\sigma}}.$$

Вычисляем супремум

$$I=\sup_t\sup_{k_2\in Z_0,|k_2|\le m_1}\left|i\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_2(s-t)}|k_2|^\sigma e^{-\gamma t}e^{\gamma t}T_{k_2}^{-1}\times \\ \times\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)ds\end{matrix}\right|^2.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера, получаем

$$I\le\left(\left|\int_0^\infty e^{-2\gamma t}dt\right|\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{2\gamma t}\sup_{k_2\in Z_0,|k_2|\le m_1}|k_2|^\sigma\left|T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)\right|^2dt\right)\le$$

$$\le\frac{c_1}{\gamma}\left\|T_{k_2}^{-1}\left(z_{k_2}{}^{(m_2)}-z_{k_2}{}^{(m_1)}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}.$$

Пользуемся тем, что $\gamma=\varepsilon\mu_0$ и оценкой линеаризованного оператора [3]. Отсюда

$$I\le\frac{1}{\varepsilon^3}c_2\left\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}.$$

Остается второе слагаемое, которое является самой нормой. Опять пользуемся оценкой:

$$\int_0^\infty e^{2\gamma t}\left|\sup_{k_1\in Z_0,|k_1|\le m_1}|k_1|^\sigma\left(ik_1\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds- \\ -T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\end{matrix}\right)\right|^2dt=$$

$$=\left\|ik_1\int_0^t \begin{matrix} e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)ds- \\ -T_{k_1}^{-1}\left(z_{k_1}{}^{(m_2)}\right)\end{matrix}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}c_3\left\|Z^{(m_2)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}.$$

Таким образом, имеем

$$J_1\le\frac{1}{\varepsilon^5}c_4\left\|Z^{(m_2)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}\left\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R_+,H_\sigma^{(m_1)}\right)}.$$

Для параметра J неравенство примет вид