

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Е.П. Кубышкин, А.Н. Куликов

Задачи и упражнения по курсу
“Уравнения математической физики”

Учебное пособие

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям Математика и
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2008

УДК 51:37
ББК В161.68я73-4
К 88

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2008 года*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор М.Е. Соловьев;
кафедра математического анализа Ярославского государственного
педагогического университета им. К.Д. Ушинского

Кубышкин, Е.П. Задачи и упражнения по курсу “Уравнения
математической физики” / Е.П. Кубышкин, А.Н. Куликов;
К 88 Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – 104 с.
ISBN (978-5-8397-0634-7)

Пособие содержит основные и наиболее важные понятия, определения и методы исследования линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Изложение ведется в основном в форме упражнений и задач. Приводится достаточно большое число упражнений и задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010100 Математика, по специальности 010101 Математика, 010501 Прикладная математика и информатика (дисциплины “Уравнения с частными производными”, “Уравнения математической физики”, блок ОПД), очной формы обучения.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 51:37
ББК В161.68я73-4

ISBN 978-5-8397-0634-7 © Ярославский
государственный университет
им. П.Г. Демидова, 2008

Оглавление

Предисловие	4
1. Основные понятия и определения	5
2. Гармонические функции...	14
3. Задача Дирихле	17
4. Задача Неймана	28
5. Уравнение колебаний струны	33
6. Интегрирование первой краевой задачи методом Фурье	38
7. Неоднородное уравнение колебаний струны	48
8. Уравнение колебаний балки	60
9. Уравнение колебаний мембраны	67
10. Уравнение теплопроводности	71
11. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	76
12. Неоднородное уравнение теплопроводности	83
13. Корректность	94
14. Примеры контрольных работ	97
Список литературы	102

Предисловие

Предлагаемое вниманию студентов математического факультета учебное пособие по курсу “Уравнения математической физики” для студентов специальности “Прикладная математика и информатика”, а также “Уравнения с частными производными” для студентов специальности “Математика” несколько отличается от других изданий по данной дисциплине. Его нельзя назвать введением в теоретический курс по данной дисциплине и просто задачником. Скорее оно занимает промежуточное положение между такого сорта изданиями. Быть может, в более полной мере авторы пытались предложить читателю (студенту) то, что и следует называть учебным пособием. Главная цель, которую ставили авторы, состоит в следующем. Приводятся самые основные и важные понятия и определения, теоремы и формулы, но достаточно кратко. Иногда эти фрагменты напоминают подробный справочник, но зато приводится достаточно большое число примеров и задач для самостоятельного решения. Это позволяет студентам лучше подготовиться к различным формам контроля, лучше усвоить практическую составляющую данного курса.

Последнее становится актуальным в связи с переходом на новые формы контроля в рамках “Болонского процесса”. Переход на образовательные стандарты, тесно связанные с теми странами Европы, которые уже перешли на данную систему, предусматривает такую форму экзамена, как письменный. Но тогда возрастает роль практической составляющей. Для математических предметов речь идет об умении решать задачи.

Учебное пособие разделено на параграфы. Нумерация формул, упражнений, задач – двойная. Первое число указывает на номер параграфа, а число после точки уже порядковый номер внутри его. В конце приведен список литературы, который содержит, прежде всего, стандартные и доступные учебники, где изложены те теоретические вопросы, которые пропущены здесь. В целом параграфы независимы и использование данного учебного пособия возможно с любой интересующей части текста, пропустив некоторые детали из предшествующих разделов.

§ 1.

Основные понятия и определения

Уравнение, содержащее, кроме независимых переменных и искомой функции, частные производные этой функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными. Наивысший порядок входящих в уравнение частных производных называется порядком дифференциального уравнения. Так, например, если рассмотреть три следующих дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где независимая функция $u(x, t)$, то первое уравнение будет уравнением первого порядка, второе уравнение имеет пятый порядок и, наконец, последнее – уравнение второго порядка.

Упражнение 1.1. Определить порядок следующих уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \exp \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Для математической физики наиболее важны и поэтому лучше всего изучены уравнения второго порядка. В случае двух независимых переменных уравнение второго порядка может быть записано в следующей форме:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0,$$

где $u = u(x, y)$.