Казанский институт (филиал) ГОУ ВПО
Российский государственный торгово-экономический университет

Кафедра информатики и высшей математики

ТАЛЫЗИН В.А.

МАТЕМАТИКА-1

Учебное пособие

КАЗАНЬ-2008г.

Введение

Учебное пособие подготовлено в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по экономическим специальностям и предназначено для студентов заочного отделения.

Цель пособия – помочь студентам в усвоении фундаментальных математических понятий, овладении навыками их применения на практике при выполнении контрольной работы по соответствующим темам высшей математики.

В пособии рассмотрены такие разделы высшей математики как предел и производная функции, неопределенный и определенный интеграл, дифференциальные уравнения, а также применение математического аппарата производной и дифференциала функции в приближенных вычислениях, для исследования функций и построения их графиков.

По каждой теме приводятся необходимые теоретические сведения, решаются типовые задачи, подобраны задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки.

1. Предел функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящимся к x_0, если для любого положительного числа ε ($\varepsilon>0$) найдется такое положительное число $\delta>0$ (зависящее в общем случае от ε), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x-x_0|<\delta,$$

выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для предела функции вводится обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Пределы функций обладают следующими основными свойствами:

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Если $f(x) = C$ (постоянная), то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$.
3. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то для любого числа C верно равенство: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[Cf(x)\right] = C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = CA$.
4. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = AB$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\pm B$,

   а если $B\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.
5. Операция предельного перехода перестановочна с операцией вычисления непрерывной функции, т. е. справедлива формула

   $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е. он находится непосредственной подстановкой предельного значения переменной вместо аргумента x : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x\to x_0$, если ее предел в точке x_0 равен нулю: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 1.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{x-2} = \dfrac{2\cdot 3+3}{3-2} = \dfrac{9}{1} = 9$.

Пример 1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{x-2} = \dfrac{2\cdot 2+3}{2-2} = \dfrac{7}{0} = \infty$.

В рассмотренных примерах предел находился сразу в виде числа или символа ∞ (бесконечность). Но чаще при вычислении пределов мы встречаемся с неопределенностями, когда результат нахождения предела не ясен. Например, в случае отношения двух бесконечно малых функций (условное обозначение $\left[\dfrac{0}{0}\right]$) или отношения двух бесконечно больших функций ($\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$). Кроме двух названных случаев встречаются неопределенности вида $[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^{\infty}],[\infty^{0}],[0^{0}]$.

Для раскрытия неопределенностей используются специальные математические приемы и два следующих предела, которые играют особую роль в математике и поэтому называются замечательными:

- *первый замечательный предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;

-*второй замечательный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to o}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ (число Эйлера).

Пример 1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что имеем дело с неопределенностью вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\frac{2\cdot 3^2-5\cdot 3-3}{3\cdot 3^2-4\cdot 3-15}=\frac{18-15-3}{27-12-15}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители. Найдем корни многочлена, стоящего в числителе. Для этого составим уравнение второй степени $2x^2-5x-3=0$ и найдем его решение:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=3,\quad x_2=\frac{5-\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда для квадратного трехчлена справедливо разложение на множители

$$2x^2-5x-3=2(x-x_1)(x-x_2)=2(x-3)(x+\frac{1}{2}).$$

Аналогичные действия выполним для многочлена, стоящего в знаменателе.

Уравнение $3x^2-4x-15=0$ имеет решения

$$x_1=\frac{4+\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-15)}}{3\cdot 2}=3,\quad x_2=\frac{4-\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-15)}}{3\cdot 2}=-\frac{5}{3}$$

и знаменатель представляется в виде: $3x^2-4x-15=3(x-3)(x+\dfrac{5}{3})$.

Сократим дробь на множитель $(x-3)$ и вычислим ее при $x=3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{3(x-3)(x+\frac{5}{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{3(x+\frac{5}{3})}=\frac{2(3+\frac{1}{2})}{3(3+\frac{5}{3})}=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$.

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что возникает неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}$, являющееся сопряженным к знаменателю

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x})}{x+3-(7-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x})}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}.$$

Пример 1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3}{3x^2+2x+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на x^2 (в более общем случае, когда числитель и знаменатель представляют многочлены разных степеней, делят на x с наибольшим показателем степени числителя и знаменателя). Используя свойства пределов, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{5+0}{3+0+0}=\frac{5}{3}.$$

Пример 1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$.

Решение. При $x\to 0$ имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Представим $tg2x=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$, в котором числитель разделим и умножим на число 2, знаменатель - на число 5, а числитель и знаменатель разделим на переменную x, тогда предел преобразуется к виду: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{5\cdot\cos 2x\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}$.

Пользуясь свойствами пределов и первым замечательным пределом, далее имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\cos 2x\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 1}=\frac{2}{5}.$$

Пример 1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{4n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{n}}{4-\dfrac{3}{n}}=1$, а

$\lim\limits_{n\to\infty}(5n-1)=\infty$. Выделим у дроби целую часть

$$\frac{4n+1}{4n-3}=\frac{(4n-3)+3+1}{4n-3}=1+\frac{4}{4n-3}.$$

Введем новую переменную $\alpha=\dfrac{4}{4n-3}$ и выразим отсюда n через α: $n=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{3}{4}$. Тогда $5n-1=5(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{3}{4})-1=\dfrac{5}{\alpha}+\dfrac{11}{4}$. Заметим, что при $n\to\infty$ переменная $\alpha\to 0$. Теперь, переходя к новой переменной α и используя второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{4n-3}\right)^{5n-1}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{5}{\alpha}+\frac{11}{4}}=$$