

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**С. О. Ширяева
А. И. Григорьев**

**Скаляризация
векторных краевых задач
гидродинамики**

Ярославль 2010

УДК 532.5:537.1

ББК В 253.3

Ш 64

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2009/10 года*

Рецензенты:

доктор физ. – мат. наук, доцент В. А. Коромыслов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники Ярославского
государственного технического университета

Ш 64 Ширяева, С. О. Скаляризация векторных краевых задач гидро-
динамики: монография / С. О. Ширяева, А. И. Григорьев; Яросл.
гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 180 с.
ISBN 978-5-8397-0761-0

Книга посвящена описанию и применению эффективного метода решения векторных краевых задач гидродинамики вязкой жидкости, основанного на представлении искомого векторного поля в виде суперпозиции трех более простых векторных полей: одного потенциального и двух вихревых, получаемых действием трех взаимно ортогональных векторных дифференциальных операторов на три различных скалярных поля, задача отыскания которых существенно проще исходной.

Монография адресована научным сотрудникам, преподавателям и студентам университетов и технических вузов.

***При написании пособия авторы имели поддержку грантов:
Рособразования № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ
(№ 09-01-00084 и № 09-08-00148).***

УДК 532.5:537.1

ББК В 253.3

ISBN 978-5-8397-0761-0

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2010

Оглавление

1. Введение	3
2. Скаляризация векторных краевых задач линейной гидродинамики	5
3. Линейные осцилляции капли вязкой жидкости	10
4. Осцилляции и устойчивость заряженной капли вязкой жидкости	14
4.1. Равновесная форма капли	15
4.2. Линеаризация задачи	16
4.3. Скаляризация уравнений	21
4.4. Скаляризация граничных условий	26
4.5. Решение скаляризованной задачи	29
4.6. Приближение идеальной жидкости	39
4.7. Асимптотика маловязкой жидкости	42
4.8. Асимптотика сильновязкой жидкости	44
4.9. Определение неизвестных коэффициентов C_{lm}^1 и C_{lm}^3	48
4.10. Решение задачи для функции $\Psi_2(\vec{r}, t)$, определяющей тороидальное вихревое движение внутри капли	50
4.11. Определение вида проекций векторного поля скоростей $\vec{u}(\vec{r}, t)$ на орты сферической системы координат	51
Приложение 4А. Математическая формулировка задачи о колебаниях заряженной капли вязкой несжимаемой жидкости	53
Приложение 4Б. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и граничные условия к ним	55

Приложение В. Разложение векторного поля скоростей на сумму трех независимых векторных полей. Скаляризация линейных векторных дифференциальных уравнений	63
Приложение Г. Выбор векторных дифференциальных операторов \hat{N}_j для задачи о колебаниях поверхности заряженной капли вязкой несжимаемой жидкости	72
Приложение Д. Вычисление выражений вида $\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{r}, t)$	82
Приложение Е. Вычисление давления электрического поля собственного заряда капли на ее свободную поверхность	86
Приложение Ж. Вычисление давления сил поверхностного натяжения на искривленную поверхность жидкости	101
Приложение З. Преобразование динамических граничных условий на свободной поверхности жидкости для касательных компонент тензора напряжений в задаче отыскания скалярных функций $\Psi_1(\vec{r}, t)$, $\Psi_2(\vec{r}, t)$, $\Psi_3(\vec{r}, t)$...	103
Приложение И. Разделение переменных в уравнениях для скалярных функций $\Psi_i(\vec{r})$	112
Приложение К. Вычисление второй производной по аргументу от модифицированной функции Бесселя $i_l(x)$	114
Приложение Л. Получение дисперсионного уравнения	115
Приложение М. Разложение в степенной ряд при малых значениях аргумента отношения сферических функций Бесселя	117
5. Об устойчивости по отношению к поверхностному заряду мениска жидкости на торце капилляра	119
5.1. Формулировка и линеаризация задачи	121
5.2. Скаляризация задачи	123

5.3. Преобразования динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений	127
5.4. Вывод и анализ дисперсионного уравнения	129
6. Неосесимметричные колебания заряженной поверхности струи электропроводной жидкости	131
6.1. Постановка задачи	131
6.2. Равновесная форма струи.....	135
6.3. Линеаризация задачи	136
6.4. Скаляризация задачи	143
6.5. Получение дисперсионного уравнения	146
7. Капиллярно-гравитационное волновое движение в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости на твердом дне.....	150
8. Пограничный слой у свободной поверхности осциллирующей заряженной капли вязкой жидкости.....	159
Литература.....	174