

УДК 519

РЕДАКТОР-СОСТАВИТЕЛЬ — профессор *Ф. А. Богомолов*

АВТОР ПРЕДИСЛОВИЯ — профессор университета Уорика (Англия)  
*М. Рид*

КОММЕНТАРИИ: профессор *Ф. А. Богомолов*,  
профессор *А. Л. Городенцев*  
профессор *В. В. Никулин*  
профессор *А. С. Тихомиров*  
профессор *П. Ньюстед*

ПЕРЕВОД СТАТЕЙ НА РУССКИЙ ЯЗЫК — *Н. А. Тюрин*

ПОДГОТОВКА ИЗДАНИЯ К ПЕЧАТИ — *А. Л. Городенцев, С. А. Кулешов*



Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований по  
проекту №06-01-14103.

---

### **Тюрин А. Н.**

Сборник избранных трудов: В 3-х т. Т. 2. Квадратичные дифференциалы, многообразия Прима и геометрия пучков квадрик. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. — 440 с.

Работы А. Н. Тюрин, собранные в этом томе, затрагивают широкий спектр проблем комплексной алгебраической геометрии и ее приложений. Среди основных тем: теория трехмерной кубики и различные аспекты теории пучков квадрик, алгебро-геометрическая конструкция локального инварианта четырехмерного риманова многообразия, теория циклов на алгебраических поверхностях, теория квадратичных дифференциалов на кривых, аналог теории Черна–Саймонса для векторных расслоений на многообразиях Калаби–Яу.

**ISBN 5-93972-436-1**

©Институт компьютерных исследований, для издания на русском языке, 2006

©А. Н. Тюрин, 2006

©Ф. А. Богомолов — редактор-составитель, 2006

<http://ics.org.ru>

## Оглавление

<b>1. Предисловие ко второму тому . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2. Пять лекций о трехмерных многообразиях . . . . .</b>	<b>13</b>
Глава 1. Компонента Гриффитса . . . . .	15
§ 1. Определение среднего якобиана тела . . . . .	16
§ 2. Отображение Абеля . . . . .	20
§ 3. Главные торы . . . . .	23
§ 4. Простейшие вычисления . . . . .	25
Глава 2. . . . .	28
§ 1. Геометрия кубики . . . . .	28
§ 2. Связки коник . . . . .	33
Глава 3. Лекция 3 . . . . .	39
§ 1. Введение . . . . .	39
§ 2. Кубика и двулистное накрытие . . . . .	41
§ 3. Фрагменты теории многообразий Прима . . . . .	43
§ 4. Отличие многообразия Прима от якобиана кривой . . . . .	48
§ 5. Добавление. Теория Мамфорда . . . . .	49
Глава 4. Многообразия Фано . . . . .	53
§ 1. Введение . . . . .	53
§ 2. Семейства Фано . . . . .	56
§ 3. Отображение Абеля семейства Фано . . . . .	61
Глава 5. Топология одномерных семейств кривых . . . . .	65
§ 1. Топология инволютивных семейств . . . . .	65
§ 2. Средний якобиан тела Фано . . . . .	70
Литература . . . . .	75
<b>3. О пересечении квадрик . . . . .</b>	<b>77</b>
Глава 1. О пересечении двух квадрик . . . . .	77
§ 1. Теория периодов . . . . .	77
§ 2. Многообразие модулей . . . . .	81
§ 3. Пространство периодов . . . . .	84
§ 4. Теорема Торелли . . . . .	90

Глава 2. . . . .	91
§ 1. Введение (классическое) . . . . .	91
§ 2. Кривая Гессе . . . . .	93
§ 3. Детерминантная гиперповерхность . . . . .	95
§ 4. Кривые рода 5 . . . . .	97
§ 5. Накрытие . . . . .	99
§ 6. Снова кривые . . . . .	101
Глава 3. Конструкция . . . . .	104
§ 1. Погружение Штейнера кривой Гессе . . . . .	104
§ 2. Линейные ряды на $\tilde{\Delta}$ . . . . .	105
§ 3. Линейные ряды Гессе и Штейнера . . . . .	107
§ 4. Ограничение связки на кривую Штейнера . . . . .	110
§ 5. Кривые . . . . .	115
Глава 4. . . . .	116
§ 1. Фильтрация . . . . .	116
§ 2. Геометрия дивизоров на $\tilde{\Delta}$ . . . . .	119
§ 3. Теорема четности . . . . .	121
§ 4. Многообразие модулей . . . . .	123
Глава 5. Средний якобиан . . . . .	127
§ 1. Введение . . . . .	127
§ 2. Линейные подмногообразия пересечения трех квадрик . . . . .	127
§ 3. Унирациональность . . . . .	129
§ 4. Средний якобиан . . . . .	131
§ 5. Средний якобиан как многообразие Альбанезе поверхности Фано . . . . .	135
§ 6. Заключение . . . . .	137
Литература . . . . .	137
<b>4. Геометрия особенностей общей квадратичной формы . . . . .</b>	<b>139</b>
§ 1. Введение (обозначения и мотивировки) . . . . .	139
§ 2. Связь между подмногообразием $D_i(q) \subset X$ и пучком $\mathcal{L}_i(q)$ . . . . .	142
§ 3. Производная форма . . . . .	145
§ 4. Пятимерные гипersвязки квадрики . . . . .	148
Литература . . . . .	153
<b>5. О периодах квадратичных дифференциалов . . . . .</b>	<b>154</b>
Глава 1. . . . .	155
§ 1. Оснащения . . . . .	155
§ 2. Производная Шварца . . . . .	159
§ 3. Проективные связности . . . . .	170
Глава 2. . . . .	176

§ 1. Проективные флаги и аффинные расслоения . . . . .	176
§ 2. Плоские расслоения . . . . .	189
§ 3. Экспоненциальный и шварцев интегралы . . . . .	200
Глава 3. . . . .	206
§ 1. Пакет периодов плоских координат . . . . .	206
§ 2. Аффинные структуры на модулях . . . . .	212
Литература . . . . .	216
<b>6. Локальный инвариант риманова многообразия . . . . .</b>	<b>219</b>
§ 1. Геометрия локальных инвариантов . . . . .	222
§ 2. Индикатриса . . . . .	230
§ 3. Универсальная структура . . . . .	235
§ 4. Инварианты специальных структур . . . . .	241
§ 5. Иерархия структур . . . . .	247
Литература . . . . .	253
<b>7. Локальный и глобальный инварианты четырехмерного псевдо- риманова многообразия . . . . .</b>	<b>255</b>
§ 1. Локальный инвариант . . . . .	256
§ 2. Модули и индикатриса . . . . .	260
§ 3. Локальный инвариант келеровой поверхности . . . . .	264
§ 4. Глобальный инвариант . . . . .	268
Литература . . . . .	275
<b>8. Циклы, кривые и векторные расслоения над алгебраической по- верхностью . . . . .</b>	<b>277</b>
Глава 1. . . . .	278
§ 1. Циклы и классы дивизоров . . . . .	278
§ 2. $K$ -блок и $K$ -фитинг . . . . .	286
§ 3. $K$ -блочные и $K$ -фитинговые отображения . . . . .	293
Глава 2. . . . .	298
§ 4. Многообразие модулей простых пучков и симметрические степе- ни $K3$ -поверхностей . . . . .	298
§ 5. Теория Брилля—Нетера для гладких кривых на $K3$ -поверхности .	303
§ 6. Инфинитезимальная гипотеза Харриса—Мамфорда . . . . .	305
Литература . . . . .	306
<b>9. Неабелевы аналоги теоремы Абеля . . . . .</b>	<b>308</b>
§ 1. Введение . . . . .	308
§ 2. Интеграл от формы Черна—Саймонса . . . . .	310
§ 3. Геометрия диаграмм Хегора . . . . .	314

§ 4. Предквантование Черна—Саймонса . . . . .	319
§ 5. Квантование. Проблема вакуумного вектора . . . . .	323
§ 6. Пространство орбит комплексной калибровки . . . . .	328
§ 7. Голоморфные дифференциалы на пространстве орбит . . . . .	331
§ 8. Когомологические соответствия . . . . .	335
§ 9. Голоморфные расслоения на трехмерных многообразиях. Дискретные инварианты . . . . .	338
§ 10. Расслоения на трехмерных многообразиях Калаби—Яу . . . . .	342
§ 11. Многообразия Фано и многообразия общего типа. Полиномы положительной степени . . . . .	347
§ 12. Геометрия векторных расслоений на флагах . . . . .	352
§ 13. Деформации флагов и векторных расслоений . . . . .	357
§ 14. Разрезание и склейка в почти комплексном и комплексном случаях . . . . .	360
§ 15. Коллекция конструктивных многообразий Калаби—Яу . . . . .	365
§ 16. Векторные расслоения на конструктивных многообразиях Калаби—Яу . . . . .	370
§ 17. Случай рода два . . . . .	375
§ 18. Заключение . . . . .	380
Литература . . . . .	382

<b>10. Структура многообразия пар коммутирующих пучков симметрических матриц . . . . .</b>	<b>385</b>
Введение . . . . .	385
§ 1. Гиперсвязки квадрик . . . . .	390
§ 2. Кривые Гессе и Штайнера . . . . .	395
§ 3. Гиперсвязка пространственной кривой . . . . .	404
§ 4. Компоненты . . . . .	411
Литература . . . . .	412

<b>Комментарии . . . . .</b>	<b>415</b>
Комментарий к статье «О периодах квадратичных дифференциалов» (Ф. А. Богомолов) . . . . .	417
Комментарий к статье «Циклы, кривые и векторные расслоения над алгебраической поверхностью» (Ф. А. Богомолов) . . . . .	420
Комментарии к статьям [1] «Локальный инвариант риманова многообразия» [2] «Локальный и глобальный инварианты четырехмерного псевдориманова многообразия» (В. Никулин) . . . . .	423
Комментарий к статье «Пять лекций о трехмерных многообразиях» (А. С. Тихомиров) . . . . .	426

---



---

Комментарий к статье «О пересечении квадрик» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . .	427
Комментарий к статье «Геометрия особенностей общей квадратичной формы» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . . . .	430
Комментарий к статье «Неабелевы аналоги теоремы Абеля» ( <i>А. Л. Горо- денцев</i> ) . . . . .	432
Комментарий к статье «Структура многообразия пар коммутирующих пучков симметрических матриц» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . . . .	436