

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЛАЗЕРНОГО И ХИМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
НА БИОТКАНИ**

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
А.Д. Баев, Ж.И. Бахтина,
М.Б. Зверева

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

Оглавление

Глава 1. СВЕТ И ВЕЩЕСТВО	4
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С БИОЛОГИЧЕСКИМИ ТКАНЯМИ	18
2.1 Принципы построения математических моделей для расчета взаимодействия лазерного излучения с мутными биотканями	18
2.2 Теория переноса	20
Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ ЧЕРЕЗ КОЖУ	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	45

оптического излучения из первой среды на границу раздела со второй взаимодействие света с веществом приводит к появлению световой волны, распространяющейся от границы раздела в первую среду.

Отражающая поверхность – это физическая граница двух сред с разными показателями преломления.

Закон отражения: луч падающий и луч отраженный, а также нормаль, восстановленная к отражающей поверхности, лежат в одной плоскости, называемой плоскостью падения, и угол падения θ равен углу отражения θ' :

$$\theta = \theta' . \quad (1.1.1)$$

Углы θ и θ' – углы между нормалью к поверхности и падающим и отраженным лучами, соответственно. Поверхность принимается достаточно гладкой, с относительно малыми неровностями по сравнению с длиной волны излучения. Такое приближение – **зеркальное отражение**. Если же, например, величина шероховатости отражающей поверхности сравнима или больше, чем длина волны излучения, имеет место **диффузное отражение**, при этом отдельные отражаемые пучки необязательно лежат в плоскости падения, а уравнение (1.1.1) уже не является верным.

Преломление имеет место, когда отражающая поверхность разделяет две среды с различными показателями преломления. Преломление происходит вследствие изменения скорости световой волны. **Закон Снелиуса:**

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v}{v'} , \quad (1.1.2)$$

где θ'' – угол преломления, v и v' – скорости света в среде до и после отражающей поверхности. Показатели преломления:

$$n = \frac{c}{v}, n' = \frac{c}{v'} , \quad (1.1.3)$$

где c – скорость света в вакууме. Это – **абсолютные показатели преломления**. Тогда уравнение (1.1.2) можно переписать в виде:

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' . \quad (1.1.4)$$

Если $\sin \theta > \frac{n}{n'}$, то преломления нет. Это – **полное отражение**.

На практике определяют **относительный показатель преломления** n_{12} – отношение скорости света в одной среде к скорости прохождения света в другой среде:

$$n_{12} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} . \quad (1.1.5)$$

С увеличением температуры показатель преломления уменьшается. Каждое вещество в твердом или растворенном состоянии состоит из определенных частиц. Известна формула **Лоренц-Лоренца**, связывающая показатель преломления n изотропного вещества с числом молекул N в единице объема и поляризуемостью α молекул вещества:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} N \alpha . \quad (1.1.6)$$

Из нее следует, что для данного химического вещества и для света с заданной длиной волны выполняется соотношение:

$$refr = \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} , \quad (1.1.7)$$

где ρ – плотность вещества. Величина $refr$ – **удельная рефракция**. Существует правило, согласно которому рефракцию сложного химического соединения можно вычислить, складывая рефракции составляющих его элементов.

Атомная рефракция R_A – произведение удельной рефракции $refr$ данного элемента на его атомную массу A :

$$R_A = A \cdot \text{refr} = \frac{A}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} . \quad (1.1.8)$$

Молекулярная рефракция R_M :

$$R_M = M \cdot \text{refr} = \frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} N_A \alpha , \quad (1.1.9)$$

где M – молекулярная масса, $N_A = 6,022\,141\,79(30) \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – постоянная Авогадро. Молекулярная рефракция не зависит ни от температуры, ни от давления, ни от агрегатного состояния вещества. Во многих случаях молекулярная рефракция обладает свойством аддитивности, то есть взаимодействие отдельных атомов с полем световой волны в первом приближении не зависит от других атомов, входящих в состав той же молекулы.

Следует отметить, что мерой количества отраженного излучения является **отражательная способность поверхности** – отношение отраженной и падающей амплитуд электрического поля. Отношение соответствующих интенсивностей определяет **коэффициент отражения**, который равен квадрату отражательной способности. Отражательная способность и коэффициент отражения зависят от угла падения, поляризации излучения и от показателей преломления сред, формирующих преломляющую поверхность. *Законы Френеля* записываются так:

$$\frac{E'_s}{E_s} = - \frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} , \quad (1.1.10)$$

$$\frac{E'_p}{E_p} = \frac{\text{tg}(\theta - \theta'')}{\text{tg}(\theta + \theta'')} , \quad (1.1.11)$$

$$\frac{E''_s}{E_s} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')} , \quad (1.1.12)$$

$$\frac{E''_p}{E_p} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} , \quad (1.1.13)$$

где E , E' и E'' – амплитуды векторов электрических полей падающего, отраженного и преломленного света, соответственно. Индексы « s » и « p » означают две плоскости колебания векторов: « s » перпендикулярна плоскости падения, а « p » – параллельна ей.

Коэффициенты отражения в каждой плоскости записываются следующим образом:

$$R_s = \left(\frac{E'_s}{E_s} \right)^2, \quad (1.1.14)$$

$$R_p = \left(\frac{E'_p}{E_p} \right)^2. \quad (1.1.15)$$

Угол, при котором $R_p = 0$, называется **углом Брюстера**. В случае отражения на границе воздух-вода ($n=1$ и $n'=1.33$) он составляет 53° . Так как и θ и θ'' очень малы в приближении нормального падения, можно положить тангенсы в уравнении равными синусам, тогда:

$$R_p = R_s \approx \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} = \frac{(\sin \theta \cos \theta'' - \cos \theta \sin \theta'')^2}{(\sin \theta \cos \theta'' + \cos \theta \sin \theta'')^2} \quad (1.1.16)$$

или (если $n=1$)

$$R_p = R_s \approx \frac{(n' \cos \theta'' - \cos \theta)^2}{(n' \cos \theta'' + \cos \theta)^2} \approx \frac{(n'-1)^2}{(n'+1)^2}. \quad (1.1.17)$$

Приближенное равенство становится строгим в приближении нормального падения. Таким образом, если $n'=1.33$, то $R_p = R_s \approx 2\%$.

1.2 Поглощение

Из-за поглощения интенсивность падающей электромагнитной волны ослабляется. **Поглощательная способность среды** определяется как отношение поглощенной и падающей интенсивностей. Поглощение

является следствием частичного перехода световой энергии в тепловое движение или колебания молекул поглощающего вещества. **Полностью прозрачная среда** не поглощает свет. Среди биологических тканей **почти прозрачными** для видимого света можно считать хрусталик глаза и роговицу. Структуры же, в которых падающее излучение практически полностью ослабляется, называют **непрозрачными**.

Говорят, что вещество полностью поглощает, если оно ослабляет интенсивность всех длин волн в рассматриваемом диапазоне на одинаковую величину, поэтому в случае видимого света, такие вещества будут выглядеть бесцветными для глаза. С другой стороны, **селективное поглощение** это преимущественное поглощение определенных длин волн относительно других. Существование цветов порождается селективным поглощением. Цвет тела определяется светом, который проникает на определенную глубину в вещество. Из-за рассеяния назад он затем поворачивает и выходит обратно из поверхности, но только после того как он был частично поглощен на определенных длинах волн. В отличие от этого, цвет поверхности определяется отражением от самой поверхности. Поэтому обычно цвета тела и цвета поверхности различны.

Часто используются два закона, которые описывают влияние толщины или концентрации на поглощение: **закон Ламберта** и **закон Бера**.

$$I(z) = I_0 e^{-\mu_a z}, \quad (1.2.1)$$

$$I(z) = I_0 e^{-k' cz}, \quad (1.2.2)$$

где z – оптическая ось, $I(z)$ – интенсивность на расстоянии z , I_0 – падающая интенсивность, μ_a – коэффициент поглощения среды, c – концентрация поглощающих центров, k' зависит от остальных внутренних параметров. Из (1.2.1) получаем:

$$z = \frac{1}{\mu_a} \ln \frac{I_0}{I(z)}. \quad (1.2.3)$$