МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕРМОДИНАМИКА И КЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Содержание

где Δt – время пребывания системы в данном состоянии, а T – полное время наблюдения.

Очень часто приходится по вероятностям отдельных событий определять вероятности более сложных событий. Для этого существуют две общие теоремы теории вероятностей — *теорема сложения* и *теорема умножения вероятностей*.

Теорема сложения вероятностей. Пусть сложное событие заключается в наступлении либо события A, либо события B, которые в свою очередь являются несовместимыми событиями. Тогда вероятность сложного события выразится как сумма вероятностей отдельных событий:

$$W(A \text{ либо } B) = W(A) + W(B). \tag{1.5}$$

В случае непрерывной функции распределения, если нас интересует вероятность того, что случайная величина будет находиться либо в интервале $[x_1, x_1 + dx_1]$, либо в интервале $[x_2, x_2 + dx_2]$, будем иметь

$$dW(x_1 \text{ либо } x_2) = dW(x_1) + dW(x_2) = f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2. \tag{1.6}$$

Эта теорема, очевидно, может быть обобщена на любое число несовместимых событий.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает одно из значений в интервале от x_1 до x_2, по теореме сложения вероятностей определяется как

$$W(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} dW(x) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{1.7}$$

Очевидно, что вероятность найти случайную величину во всем интервале ее возможных значений представляет достоверное событие. Поэтому

$$\int dW(x) = \int f(x)dx = 1. \tag{1.8}$$

Интегрирование ведется по всей области изменения переменной x. Это равенство называется *условием нормировки функции распределения*. Оно используется для нахождения произвольной константы, входящей в функцию распределения вероятностей.

Теорема умножения вероятностей. Иногда некоторое событие может произойти только при условии, что произойдет другое событие. Вероятность такого сложного события в этом случае называется условной вероятностью. Условная вероятность события A при условии выпадения события B определяется по формуле

$$W(A \text{ при условии } B) = W(A|B) \cdot W(B). \tag{1.9}$$

Точно так же вероятность сложного события, заключающегося в том, что одновременно имеют место два *независимых* события A и B, определяется через произведение вероятностей $W(A)$ и $W(B)$ отдельных *независимых* событий A и B по формуле

$$W(A \text{ и } B) = W(A) \cdot W(B). \tag{1.10}$$

В случае непрерывных независимых величин x и y вероятность сложного события, заключающегося в том, что случайная величина x принимает значение в интервале от x до $x + dx$ и одновременно случайная величина y принимает значение в интервале от y до $y+dy$, определяется произведением вероятностей

$$dW(x, y) = dW(x)dW(y) = f(x)g(y)dxdy, \tag{1.11}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — плотности вероятности для величин x и y.

Среднее значение некоторой функции $F(x)$ от случайной величины x определяется суммой

$$\overline{F} = \langle F \rangle = \sum_i F(x_i)W_i, \tag{1.12}$$

если x — дискретная величина, и интегралом

$$\overline{F} = \langle F \rangle = \int\limits_X F(x)dW(x) = \int\limits_X F(x)f(x)dx. \tag{1.13}$$

если x — непрерывная величина.

Для оценки масштаба возможного отличия случайной величины от среднего значения используется дисперсия. Дисперсия определяется по следующим формулам:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sum_i (x_i - \overline{x})^2 W_i \text{ (для дискретной случайной величины)}, \tag{1.14}$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int (x - \overline{x})^2 f(x)dx \text{ (для непрерывной случайной величины)}. \tag{1.15}$$

Так как $(\Delta F)^2$ всегда положительна, то ее среднее значение стремится к нулю, лишь если она сама стремится к нулю, т.е. когда вероятности заметных отклонений F от $\overline{F}$ малы. Величина

$$\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}$$

называется средним квадратичным отклонением (в статфизике ее часто называют средней квадратичной флуктуацией), имеет размерность $[F]$ и

ђqqbqyeY bE deqEbYse d esaqcsy Jqqbqyqè

характеризует ширину интервала отклонений истинных значений F от $\overline{F}$. Безразмерная величина

$$\delta F = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\overline{F}}$$

называется относительной флуктуацией.

Таким образом, зная закон распределения случайной величины, можно определить все ее характеристики, которые нас интересуют. Поэтому одной из основных задач статистической физики является отыскание законов и функций распределения тех или иных физических случайных величин в различных физических системах.

Пример 1.1. Идеальный газ, состоящий из N молекул, находится в сосуде с объемом V. Определить вероятность $P_n(v)$ того, что в заданном объеме v будет содержаться в данный момент точно n молекул. Рассмотреть предельные случаи:
а) $n \ll N,\ N \to \infty$, б) $\dfrac{v}{V}N \gg 1,\ \Delta n = n - \overline{n} \ll \overline{n}$.

Решение. Вероятность того, что одна молекула находится в объеме v, равна v/V. Вероятность найти одновременно определенные n молекул в объеме v есть $(v/V)^n$. Необходимо учесть также, что остальные $N-n$ молекул должны быть вне указанного объема, поэтому вероятность найти в объеме v ровно n определенных молекул есть $(v/V)^n(1 - v/V)^{N-n}$. Число способов, которыми можно выбрать n произвольных молекул из общего числа N, дается биномиальным коэффициентом $C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$. Окончательно вероятность того, что в объем v попадут произвольные n молекул из общего числа N,

$$P_n(v) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n}. \tag{1.16}$$

Рассмотрим теперь предельные случаи:

а) обозначим $\overline{n} = N(v/V)$. Тогда распределение (1.16) переписывается в виде

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{\overline{n}}{N}\right)^n\left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{N-n} =$$

$$= \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}\left(\frac{\overline{n}}{N}\right)^n\left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{N-n}.$$

Принимая во внимание малость n по сравнению с N и переходя к пределу $N \to \infty$, получим

$$P_n = \lim_{N\to\infty}\frac{N^n}{n!}\left(\frac{\overline{n}}{N}\right)^n\left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{N-n} =$$