Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. Ф. Чаплыгин

Введение в математический анализ

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Физика, Телекоммуникации, Радиотехника

Ярославль 2010

УДК 517
ББК В 16я73
Ч 19

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент:

Ч 19 **Чаплыгин, В. Ф. Введение в математический анализ:** метод. указания / В. Ф. Чаплыгин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2010. – 44 с.

В методических указаниях охвачены те разделы математики, которые необходимо знать для изучения математического анализа. В качестве приложения приведены два теста. Тест I рекомендуется выполнить перед изучением указаний, а тест II – после.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 010701.65 Физика, 210400.62 Телекоммуникации, 210302.65 Радиотехника (дисциплина «Математический анализ», блок ОПД), очной формы обучения.

УДК 517
ББК В 16я73

Множества, операции над множествами

Множество относится к неопределяемым понятиям. Под ним подразумевается набор, совокупность, класс некоторых объектов, элементов, объединенных по определенному признаку.

Набор, состоящий из трех букв a, b и c является множеством, и его можно обозначить так: A=$\{a, b, c\}$. Можно говорить о множестве натуральных чисел от 1 до n включительно, будем называть его отрезком натурального ряда и обозначать I_n. Так, $I_5=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I_{100}=\{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$. Множество всех натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Все четыре множества точно описаны. Определено, какие объекты принадлежат тому или иному множеству. Тот факт, что элемент c принадлежит множеству A, записывается в виде $c \in A$. То, что число 6 не принадлежит множеству I_5, обозначается так: $6 \notin I_5$. Если все элементы множества A являются элементами множества B, то A называется *подмножеством* B, или, говорят, A включено в B, и символически это записывается так: $A \subset B$. В наших примерах $I_5 \subset \mathbb{N}$, $I_{100} \subset \mathbb{N}$, $I_n \subset \mathbb{N}$ для любого n. Особую роль играет так называемое *пустое множество* – это множество, не содержащее ни одного элемента, его обозначают символом $\varnothing$ и по определению считают, что для любого множества E, $\varnothing \subset E$.

Рассмотрим две основные операции над множествами: объединение и пересечение.

Пусть взяты два множества $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда под их объединением понимается множество $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то есть к элементам множества A добавлены элементы из B, которые не содержались в A. Пересечением множеств A и B является множество $A \cap B=\{4, 5, 6\}$, то есть оно содержит те элементы, которые одновременно принадлежат как множеству A, так и множеству B. Если множества A и B не содержат общих элементов, то $A \cap B=\varnothing$. Так, если $A=\{a, b, c\}$, B={*d*, *e*}, то A⋂B=∅. Можно говорить об объединении и пересечении трех, четырех и более множеств. Так, если говорить о множествах натуральных чисел, дающих при делении на 3 в остатке 0, 1, 2, то их объединение дает все множество ℕ. Если взять три множества натуральных чисел, кратных 2, 3 и 5, то пересечением этих множеств будет множество натуральных чисел, кратных 30. Если же взять множество всех нечетных натуральных чисел и множество всех четных натуральных чисел, то пересечением этих множеств будет пустое множество, то есть ∅. Эти операции можно иллюстрировать на так называемых кругах Венна.

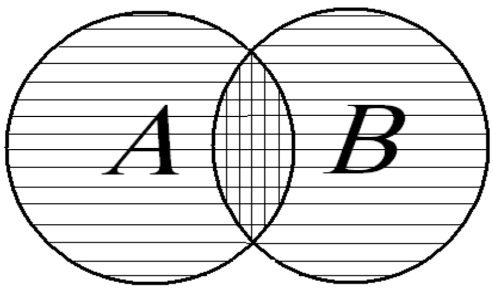

Рис. 1

Так, если A – это левый круг, а B – правый, то их пересечение показано двойной штриховкой, а объединение – горизонтальной штриховкой (см. рис. 1).

Функции, отображения

Пусть имеются два множества D и E. Соответствие, которое каждому элементу $x \in D$ относит некоторый элемент $y \in E$, называется *отображением* D в E. При этом множество D называется *областью определения*. Элемент $x \in D$ называется *аргументом*, а элемент $y \in$ E называется *значением отображения* или *образом* элемента x.

Отображение называют функцией и записывают $y=f(x)$ или $x \rightarrow f(x)$, читается: x соответствует $f(x)$, при этом x называют *прообразом* y и обозначают $f^{-1}(y)$, используется ещё обозначение f: D→E.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$, называются *равными*, если совпадают их области определения и для любого x из области определения выполнено равенство $f(x) = g(x)$.

Взаимно однозначное соответствие

Соответствие между двумя множествами A и B называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу множества A сопоставляется единственный элемент из множества B и каждому элементу множества B сопоставляется ровно один элемент из множества A.

Так, если A=$\{a, b, c\}$ и B=$\{1, 2, 3\}$ и соответствие определено следующим образом: $f(a)=1$, $f(b)=2$, $f(c)=3$, то оно является взаимно однозначным. Если же определить другое отображение φ из A в B так, что $\varphi(a)=1$, $\varphi(b)=1$, $\varphi(c)=2$, то оно не будет взаимно однозначным, так как элементу $1 \in$ B отвечают два элемента из A, два прообраза и элементу $3 \in$ B не отвечает никакой элемент из A.

Между множествами A=$\{a, b, c\}$ и B=$\{1, 2, 3, 4\}$ нельзя установить взаимно однозначное соответствие. Если бы оно существовало, то образов $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ было бы три, а элементов в B – четыре. Или прообразов $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(4)$ было бы четыре, но элементов в A только три.

Назовем множество A *конечным,* если между ним и некоторым отрезком I_n натурального ряда можно установить взаимно однозначное соответствие. Множество A=$\{a, b, c\}$ конечное (это было показано). Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, они называются

ŋ̧qdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè