ŋqdqɐeʎ bɆ dədɆbʎɜə d ɛɔɑbɔʎ Ɉqddʎqɐè

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SIBERIAN BRANCH
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF PHILOSOPHY AND LAW

**YU.L. ERSHOV, V.V. TSELISHCHEV**

# ALGORITHMS AND COMPUTABILITY IN HUMAN KNOWLEDGE

Editors
*Doctor K.F. Samokhvalov,*
*Doctor A.S. Morozov*

NOVOSIBIRSK
PUBLISHING HOUSE OF THE SIBERIAN BRANCH
OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
2012

ŋqdqɐeʎ bɆ dədɆbʎɜə d ɛɔɑbɔʎ Ɉqddʎqɐè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ ɈqddɎqɏè

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА

**Ю.Л. ЕРШОВ, В.В. ЦЕЛИЩЕВ**

# АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИМОСТЬ В ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ ПОЗНАНИИ

Научные редакторы
доктор философских наук *К.Ф. Самохвалов*,
доктор физико-математических наук *А.С. Морозов*

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
2012

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ ɈqddɎqɏè

УДК 004.9+510+1
ББК 73+22.12+87
Е80

*Редакционная коллегия серии*:
академик В.М. Фомин (главный редактор),
академик Ю.И. Шокин, член-корреспондент РАН В.А. Ламин,
член-корреспондент РАН В.Н. Опарин, доктор биологических наук В.В. Глупов,
доктор экономических наук В.Ю. Малов, доктор химических наук В.П. Федин,
кандидат физико-математических наук Н.Г. Никулин (ответственный секретарь)

Серия основана в 2003 г.

**Ершов Ю.Л.**
Е80 Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании / Ю.Л. Ерщов, В.В. Целищев; отв ред. К.Ф. Самохвалов, А.С. Морозов; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т математики, Ин-т философии и права. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. – 504 с. (Интеграционные проекты СО РАН; Вып. 40)

Настоящая монография представляет собой итог исследований по проблеме алгоритмизации мышления, которая часто увязывается с распространенной формулировкой «может ли машина мыслить?» В монографии представлены практически все аспекты проблемы понимания деятельности, связанной с вычислимостью и компьютерными методами исследования возможностей мышления.

Дано сопоставление вычислимости и невычислимости в контексте методов познания законов природы. Описан математический аппарат вычислимости, в частности, представлена теория рекурсивных функций. Особое внимание уделено связи этой теории с программой оснований математики Д. Гильберта – финитизмом. Процесс алгоритмизации мышления представлен в терминах минимальных средств строгого математического доказательства. При этом обнаружена проблема обозримости доказательства, а также вычислимости как средства получения доказательства. Понятие эффективной вычислимости обсуждено в связи со статусом тезиса Черча, который долгое время был предметом дискуссий.

Монография предназначена специалистам в области компьютерных исследований, математической логики, философии, логики и методологии науки.

Утверждено к печати Учеными советами Института философии и права СО РАН и Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Рецензенты:
доктора философских наук К.Ф. Самохвалов, А.Л. Симанов,
канд. физ.-мат. наук Л.Н. Победин

По итогам исследований в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта № 1 СО РАН (2006–2008 гг.) «Вычислимость и рациональность: исследование применимости тезиса Черча – Тьюринга и понятия эффективного вычисления к проблеме соотношения дедуктивного и эмпирического познания когнитивных и физических процессов»

ISBN 978–5–7692–1248–8 (Вып. 40)
ISBN 978–5–7692–0669–6

© Ершов Ю.Л., 2012
© Целищев В.В. 2012
© Институт математики СО РАН, 2012
© Институт философии и права СО РАН, 2012
© Оформление. Издательство СО РАН, 2012

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddʏqɐè

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. **ВЫЧИСЛИМОСТЬ И НЕВЫЧИСЛИМОСТЬ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
- Рекурсивность и вычислимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
- Алгоритм, эффективно вычислимая функция и рекурсивность . . . . . . 6
- Алгоритмы и знание . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
- Невычислимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
- Практическая невычислимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
- Невычислимость, редукционизм и холизм . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
- Физикализм, бесконечность и невычислимость . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
- Компьютерная модель вселенной . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
- Машинная невычислимость и человеческая вычислимость . . . . . . . . . 22
- Вычисления и алгоритмы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
- Структура диагонального аргумента Пенроуза . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
- Истина и алгоритм . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
- Простота алгоритма и возникновение сложности . . . . . . . . . . . . . . . . 30

Глава 2. **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ВЫЧИСЛИМОСТИ** . . . . . . . . . . . . 32
- Рекурсивные функции и основания математики . . . . . . . . . . . . . . . . . –
- Примитивно рекурсивные функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
- Функция Аккермана . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
- Финитизм и примитивно рекурсивная арифметика . . . . . . . . . . . . . . . 37
- Поиск более общего понятия – общерекурсивные функции Геделя . . . 39
- Эволюция рекурсивности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
- Неразрешимость и $\lambda$-определимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
- Алгоритмы и $\lambda$-исчисление . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

Глава 3. **ИНТУИЦИЯ, ФИНИТИЗМ И ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
- Терминологические замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
- Основные направления исследований соотношения ПРА и финитизма 48
- Финитизм и минимальный вид мышления . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
- Эпистемологический статус объектов финитизма . . . . . . . . . . . . . . . 50
- Финитизм: онтология и эпистемология . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
- Финитарность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
- Простота и вычисления . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
- Тезис Гильберта . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
- Финитизм и интуитивное знание . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
- Интуитивность операций сложения и умножения . . . . . . . . . . . . . . . . 58
- Обоснованность тезиса Гильберта . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
- Финитизм и понятие функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddʏqɐè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Финитизм и понятие числа . . . . . . . . . . 62
Тезис Тейта . . . . . . . . . . 64
Сфера действия финитизма и рекурсивные функции . . . . . . . . . . 65
Контрпримеры финитизму! . . . . . . . . . . 67
Если не интуиция, то что? . . . . . . . . . . 69

Глава 4. **ФИНИТИЗМ И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ** . . . . . . . . . . 72
Математика и философия . . . . . . . . . . –
Финитизм Гильберта и интуиция . . . . . . . . . . 73
Финитизм и программа Гильберта . . . . . . . . . . 75
Семантика финитизма . . . . . . . . . . 81
Финитизм как основания математики . . . . . . . . . . 84
Финитизм и непротиворечивость формальной системы . . . . . . . . . . 86
Математика и логика как основания математики . . . . . . . . . . 87

Глава 5. **АПРИОРИЗМ И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТУИЦИИ** . . . . . . . . . . 90
Кантовская теория интуиции . . . . . . . . . . –
Сингулярность интуиции . . . . . . . . . . 91
Игровая интерпретация кванторов и индивиды . . . . . . . . . . 93
Логика и интуиция . . . . . . . . . . 97
Гильберт и Кант . . . . . . . . . . 100
Кантианская притча Эддингтона . . . . . . . . . . 101
Интуитивное, логическое и символическое . . . . . . . . . . 102
Феноменология и интенциональность . . . . . . . . . . 106
Интуиция и интенция . . . . . . . . . . 109
Интенции и конструкции . . . . . . . . . . 111
Феноменология алгоритма . . . . . . . . . . 112
Виды конструирования . . . . . . . . . . 114
Интенциональность как интенсиональность . . . . . . . . . . 117

Глава 6. **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ И МИНИМАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ** . . . . . . . . . . 120
Логика и базис математического мышления . . . . . . . . . . –
Натуральные числа . . . . . . . . . . 121
Аксиомы Пеано . . . . . . . . . . 123
Нестандартные интерпретации . . . . . . . . . . 124
Статус пятой аксиомы Пеано . . . . . . . . . . 127
Система Q . . . . . . . . . . 128
Математическая индукция как экономия мышления . . . . . . . . . . 130
Математическая индукция как определение натуральных чисел . . . . . . . . . . 132
Индукция и интуиция . . . . . . . . . . 135
Финитизм и математическая индукция . . . . . . . . . . 137
Обозримость и формализуемость математических структур . . . . . . . . . . 140
Индукция и минимальные средства математического мышления . . . . . . . . . . 143
Математическая индукция и пределы эмпиризма . . . . . . . . . . 144
Интуиция процесса конструирования . . . . . . . . . . 146
Априоризм и феноменология . . . . . . . . . . 147
Феноменология математической индукции . . . . . . . . . . 149

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Глава 7. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И РАЦИОНАЛЬНОЕ МЫШЛЕНИЕ** . . . . . . . . . . 150
Доказательство и диалектика . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Понимание без доказательства: математические метафоры . . . . . . . . . . 154
Осмысленность доказательства . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
Рациональность математического рассуждения . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
Теоретические ограничения на математическую аргументацию . . . . . . 165
Значение и интерпретация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167
Неопределенность указания в языке . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168
Интерпретация и объяснение в математическом языке . . . . . . . . . . . . 169
Значение как употребление . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171

Глава 8. **ОБОЗРИМОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174
Обозримость дедукции у Бэкона и Декарта . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Локальная и глобальная обозримость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177
Обозримость доказательства в аналитической философии . . . . . . . . . 179
Обозримость и формализуемость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181
Обозримость и рациональность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 182
Три характеристики доказательства . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184
Обозримость и эмпиризм . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 185
Доказательство и проверка доказательства . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187
Соотношение обозримости и формализации . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188
Дихотомии локальная – глобальная обозримость и комбинаторное доказательство-озарение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189

Глава 9. **ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 192
Элементарный шаг дедукции и вычисление . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Когнитивный акт *versus* эмпирическая процедура . . . . . . . . . . . . . . . 195
Дедукция как вычисление . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 199
Элементарность дедуктивного шага . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 202

Глава 10. **ЭПИСТЕМОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕРСИИ ТЕЗИСА А. ЧЕРЧА** . . . . . . . . 204
Истоки и различные формулировки тезиса Черча . . . . . . . . . . . . . . . –
Попытки обосновать тезис Черча . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 205
Возражения против тезиса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207
Можно ли доказать тезис Черча? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209
Доказательство тезиса! . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 211
Тезис как определение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 214
Интуиция и формализация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
Модальности в математике . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
Структурализм и супертезис . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
Нормативность и экспликация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219

Глава 11. **ЭФФЕКТИВНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222
Вычисление как операция, производимая человеком . . . . . . . . . . . . . –
«Человеческая» версия тезиса Черча . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223
Неполнота и эффективная вычислимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
Пошаговый аргумент Черча . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Дедукция и эффективность процедур . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226
Тезис Тьюринга . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229
Машинная версия тезиса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231
Абсолютность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232

Тезис Ганди . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 234
Физический тезис Ч-Т (ФТЧТ) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 237

Глава 12. **ИСТОРИЯ ТЕЗИСА ЧЕРЧА** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238
Аксиоматика, алгоритмы и механизм . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Рождение тезиса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 240
Как был воспринят тезис Черча? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 242
Социология ярлыков . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
Судьба тезиса Черча . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247

Глава 13. **ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ОБЫДЕННАЯ** . . . . . . 251
Эффективные вычисления и эффективные процедуры . . . . . . . . . . . –
Эффективность машины Тьюринга . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 253
Структура и разновидности тезиса Черча – Тьюринга . . . . . . . . . . . . 256
Иерархия тезисов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 258
Операции с абстрактными и физическими символами . . . . . . . . . . . . 260
Вычисление функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 262
Причинные и формальные манипуляции с символами . . . . . . . . . . . 265

Глава 14. **МАТЕМАТИКА И МЫШЛЕНИЕ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 268
Два направлени в понимании проблемы алгоритмизации мышления . –
Математическая логика, мозг и компьютер . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 270
Генезис и постановка проблемы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273
Методология философских заключений из математических результатов 274
Гедель: философия и математика . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 277
Дилемма Геделя . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 279
Анализ дилеммы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 282
Машины, математики и математические предложения . . . . . . . . . . . 285
Лукас, Пенроуз и Гедель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286

Глава 15. **ЧЕЛОВЕК, МАШИНА И ГЕДЕЛЕВО ПРЕДЛОЖЕНИЕ** . . . . . . . . . 289
Математические результаты и метафизика . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Аргумент Лукаса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
Экспликация менталистского аргумента . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 292
Критика Бенацеррафом аргумента Лукаса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 295
Следует ли формализовать аргумент Лукаса? . . . . . . . . . . . . . . . . . 300
Возражение в стиле Дж. Мура . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 303
Диалектика первого и третьего лица . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Бремя доказательства непротиворечивости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 306
Нормативное постулирование непротиворечивости . . . . . . . . . . . . . 308
Эмпирическая природа установления непротиворечивости . . . . . . . . 309
Металингвистические соображения относительно непротиворечивости 310

Глава 16. **ТРАНСФИНИТНЫЙ АРГУМЕНТ И ПРИНЦИПЫ РЕФЛЕКСИИ** . . 314
Трансфинитное расширение системы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
Игра человека с компьютером . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 315
Расширение системы и понимание . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 316
Теорема Клини – Черча . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 318
Антропоцентризм и человеческие возможности . . . . . . . . . . . . . . . . 319
Геделево предложение как принцип рефлексии . . . . . . . . . . . . . . . . 321
Непротиворечивость как принцип рефлексии . . . . . . . . . . . . . . . . . . 322

ђqdbуеҮ bɆ dеdƐbҮзе d еsаdсу ҶdddҮdуѐ

Сильные принципы рефлексии и неестественное расширение системы 324
Алгоритмы и геделизация . . . . . . . . . . 325
Формализация и «скачки» в мышлении . . . . . . . . . . 329
Принцип рефлексии для рекурсивных ординальных чисел . . . . . . . . . . 330
Рационалистический оптимизм Геделя . . . . . . . . . . 333

Глава 17. **КОМПЬЮТЕР, ИСТИНА И ДОКАЗУЕМОСТЬ** . . . . . . . . . . 335
«Видение» истины . . . . . . . . . . –
«Видение» истины геделева предложения машиной Тьюринга и человеком . . . . . . . . . . 339
Расхождение истины и доказательства . . . . . . . . . . 340
Ничья в игре между человеком и машиной . . . . . . . . . . 344
Синтаксические и семантические характеристики формальных систем 346
Оператор доказуемости . . . . . . . . . . 347
«Знание» машины . . . . . . . . . . 349
Оператор истины . . . . . . . . . . 351
Con($T$) как дополнительная аксиома и принцип рефлексии . . . . . . . . . . 352
Более мощные логические системы . . . . . . . . . . 355
Машина Тьюринга знает свое геделево предложение . . . . . . . . . . 357

Глава 18. **АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ МЕНТАЛИЗМА** . . . . . . . . . . 359
Вычисления и алгоритмы . . . . . . . . . . –
Диагональный аргумент Пенроуза . . . . . . . . . . 363
Истина и алгоритм . . . . . . . . . . 366
Платонизм и истинность геделева предложения . . . . . . . . . . 368
Обоснованность формальной системы и мышление . . . . . . . . . . 371
Неосознаваемый факт эквивалентности алгоритма и мышления . . . . . 372
Сводка аргумента Пенроуза о неосознаваемости эквивалентности ума машине . . . . . . . . . . 373
Как следует понимать формальную систему, симулирующую ум? . . . . 374
Неопровержимость математических истин . . . . . . . . . . 377
Новый аргумент Пенроуза . . . . . . . . . . 378
Еще одна версия «нового» аргумента Пенроуза . . . . . . . . . . 382

Глава 19. **НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОЛНОТА** . . . . . . . . . . 388
Логика и мышление . . . . . . . . . . –
Теоремы Геделя о неполноте . . . . . . . . . . 389
Интермедия: короткое доказательство Булоса второй теоремы о неполноте . . . . . . . . . . 390
Сфера и причина ограничений в «ограничительных» теоремах Геделя 392
Локальная и глобальная непротиворечивость . . . . . . . . . . 394
Судьбы непротиворечивости арифметики . . . . . . . . . . 397
Относительность обоснованности . . . . . . . . . . 398
Эмпирические и дедуктивные факторы в обнаружении непротиворечивости . . . . . . . . . . 400
Неопровержимость знания о собственной непротиворечивости . . . . . 401
Противоречиво ли человеческое мышление? . . . . . . . . . . 403
Полнота формальной системы . . . . . . . . . . 406
Различные виды полноты . . . . . . . . . . 408
Какого рода неполнота имеется в виду в теоремах Геделя . . . . . . . . . . 409

ђqdbуеҮ bɆ dеdƐbҮзе d еsаdсу ҶdddҮdуѐ

Глава 20. **ИСТИННОСТЬ ГЕДЕЛЕВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ** . . . . . . . . . . . . . . . . . 412
    Три взгляда на причину истинности геделева предложения . . . . . . . . –
    Истинность и непротиворечивость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 413
    Стандартная интерпретация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 414
    Нестандартные модели . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 416
    Структура геделева предложения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 418
    «Семантический» аргумент . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 419
    «Дефляционная» теория истины . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 421
    Неразрешимость и семантический аргумент . . . . . . . . . . . . . . . . . . 424
    Истина и выразительные возможности языка . . . . . . . . . . . . . . . . . 425
    Предикат истины и консервативность расширения системы . . . . . . . 427
    Принципы рефлексии и истина . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 428
    Аналитические и синтетические математические истины . . . . . . . . . 431
    Познаваемость математических истин . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 433

Глава 21. **ЧЕЛОВЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 437
    Геделево предложение и платонизм . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . –
    Объективная и субъективная математика . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 438
    Дедуктивный базис человеческой математики . . . . . . . . . . . . . . . . . 440
    Некомпьютерный характер мышления . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 443
    Эффективность рационального мышления . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 446
    Окончательные правила . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 448
    Прямой доступ к истине . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 450
    Математическое мышление и рекурсивные функции . . . . . . . . . . . . 454
    Неполнота и кодирование . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 457
    Роль принципа рефлексии в постижении бесконечного . . . . . . . . . . . 459
    Самореференция и кодирование . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 461
    Теорема Гудстейна и человеческая математика . . . . . . . . . . . . . . . . 463
    Геделево предложение и человеческая математика . . . . . . . . . . . . . . 467

Глава 22. **«СОЗНАНИЕ» МАШИНЫ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 469
    Эпистемическая и теоретико-доказательная интерпретации . . . . . . . –
    Самосознание машины . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 471
    Стадии самоосознания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 475
    Регулярность, нормальность и непротиворечивость . . . . . . . . . . . . . 477
    Сводка результатов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 480
    Рефлексивность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 481
    Неподвижные точки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 483
    Стабильная система . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 484
    Логические машины . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 486

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 490