

Министерство образования Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**А. И. Григорьев**  
**С. О. Ширяева**

**Векторный анализ  
в ортогональных  
криволинейных координатах**

*Учебное пособие*

Ярославль 2010

УДК 530.1:51–72  
ББК В151.5я73  
Г 83

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2009/10 года*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Коромыслов;  
кафедра прикладной математики и вычислительной техники  
Ярославского государственного технического университета

Г 83 Григорьев, А. И. Векторный анализ в ортогональных криволинейных координатах: учеб. пособие / А. И. Григорьев, С. О. Ширяева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 132 с.

ISBN 978-5-8397-0760-3

Пособие предназначено для студентов физических специальностей университетов. Изложение ведется в евклидовом пространстве таким образом, чтобы дать читателю с минимальной математической подготовкой представление о пространственной кривой, скалярном, векторном и тензорном полях, правилах употребления оператора «набла» при бескоординатной записи физических выражений, использовании координатной формы записи линейных и квадратичных дифференциальных выражений в ортогональных криволинейных координатах, основах тензорной алгебры, записи и использовании дифференциальных векторных операций первого и второго порядков в тензорной форме.

***При написании учебного пособия  
авторы пользовались поддержкой грантов Рособразования  
№ РНП .2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084-а и № 09-08-00148-а.***

УДК 530.1:51–72  
ББК В151.5я73

ISBN 978-5-8397-0760-3

© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова, 2010

## Оглавление

Глава 1. Элементы дифференциальной геометрии .....	3
§1. Дифференцирование векторных функций.....	3
§2. Дифференциальная геометрия линии в пространстве .....	5
§ 3. Ортогональные криволинейные координаты.....	12
§ 4. Общее рассмотрение криволинейных координат.....	17
Глава 2. Векторный анализ в ортогональных криволинейных системах координат .....	22
§ 1. Градиент. Производная по направлению .....	22
§ 2. Циркуляция векторного поля по кривой .....	27
§ 3. Уравнение векторной линии .....	29
§ 4. Поток векторного поля .....	30
§ 5. Дивергенция. Теорема Гаусса-Остроградского .....	32
§ 6. Ротор. Теорема Стокса .....	40
§ 7. Оператор Лапласа скалярного поля.....	48
§ 8. Векторные дифференциальные операции второго порядка от векторных функций .....	49
Глава 3. Бескоординатная форма записи операций векторного анализа .....	51
§ 1. Оператор Гамильтона – «набла». Дифференцирование по радиус-вектору.....	51
§ 2. Применение оператора «набла» к произведениям скалярных и векторных функций .....	54
§3. Производные по направлению скалярной и векторной функций.....	59
§ 4. Континуальная производная .....	61
§ 5. Векторные дифференциальные операции второго порядка от векторных функций .....	69
§ 6. Интегрирование полей. Формулы Грина.....	70
§ 7. Обобщенная формула Остроградского .....	73
§ 8. Инвариантность и ковариантность физических законов .....	81
§ 9. Тензор-производная .....	84
Глава 4. Тензорная алгебра .....	86

§ 1. Правила преобразования ортонормированного базиса.....	86
§ 2. Тензорное определение вектора и скаляра .....	90
§ 3. Определение тензора .....	92
§ 4. Сложение тензоров. Умножение тензора на вещественное число. Тензорное произведение тензоров.....	97
§ 5. Свертывание тензора.....	99
§ 6. Симметричные и антисимметричные тензоры .....	104
§ 7. Псевдотензоры .....	108
§ 8. Свойства тензора Леви-Чивита .....	111
§ 9. Тензорные поля. Тензорная запись дифференциальных векторных операций .....	117
§ 10. Тензор производная. Деформация и ротация векторного поля.....	119
§ 11. Ковариантные и контравариантные компоненты тензоров. Ковариантное дифференцирование.....	122
Рекомендованная литература.....	129

Учебное издание

**Григорьев Александр Иванович**  
**Ширяева Светлана Олеговна**

**Векторный анализ**  
**в ортогональных криволинейных координатах**

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 25.06.10. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. офсетная.  
Гарнитура "Times New Roman". Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 5,88.  
Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе Ярославского  
государственного университета им. П. Г. Демидова.  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.  
Отпечатано на ризографе.  
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.  
Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37  
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.