

А.И. Созутов  
Н.М. Сучков  
Н.Г. Сучкова

# БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ИНВОЛЮЦИЯМИ

монография

институт математики



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

А. И. СОЗУТОВ, Н. М. СУЧКОВ, Н. Г. СУЧКОВА

# БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ИНВОЛЮЦИЯМИ

Монография

Красноярск

СФУ

2011

УДК 512.745.4

ББК 22.148

С 54

Рецензенты:

В. Д. Мазуров, член-кор. РАН, доктор физ-матем. наук, профессор;

В. П. Шунков, доктор физ-матем. наук, профессор

**Созутов, А. И.**

**С 54**      Бесконечные группы с инволюциями : монография / А. И. Созутов,  
Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова. - Красноярск : Сибирский федеральный ун-т,  
2011. – 149 с.  
ISBN 978-5-7638-2127-7

Монография посвящена изложению результатов исследования бесконечных групп с заданными централизаторами инволюций, дважды транзитивных групп подстановок и групп с заданной сильно вложенной или сильно изолированной подгруппой.

Для научных работников, аспирантов и студентов математических специальностей университетов.

**УДК 512.745.4**

**ББК 22.148**

© Созутов А. И., 2011

© Сучков Н. М., 2011

© Сучкова Н. Г., 2011

© Сибирский федеральный  
университет, 2011

ISBN 978-5-7638-2127-7

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ</b>	<b>12</b>
1.1 Используемые обозначения и термины . . . . .	12
1.2 Группы. Первичные понятия . . . . .	16
1.3 Группы подстановок . . . . .	26
1.4 Группы Фробениуса . . . . .	28
1.5 Группы Цассенхауза . . . . .	29
1.6 Линейные группы . . . . .	30
<b>2 ГРУППЫ С ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫМИ ИНВОЛЮЦИЯ-</b> <b>МИ</b>	<b>34</b>
2.1 $FC$ -группы . . . . .	35
2.2 Некоторые свойства 2-групп . . . . .	39
2.3 Основные леммы . . . . .	46
2.4 Частные случаи теоремы 2.1 . . . . .	49
2.5 Завершение доказательства теоремы 2.1 . . . . .	53
2.6 Следствия и пример . . . . .	56
<b>3 ТОЧНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ</b>	<b>60</b>
3.1 Обобщение теоремы Жордана . . . . .	61
3.2 Чётные пары Фробениуса . . . . .	65

3.3	Обобщение теоремы Холла . . . . .	70
3.4	Стабилизатор — $FC$ -группа . . . . .	72
3.5	Стабилизатор — 2-группа . . . . .	76
<b>4</b>	<b>ГРУППЫ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ</b>	
	<b>ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВОЛЮЦИЙ</b>	<b>81</b>
4.1	Матричные представления групп $L_2(Q)$ . . . . .	82
4.2	Подстановочные представления групп $L_2(Q)$ . . . . .	85
4.3	Строение сильно вложенной подгруппы . . . . .	89
4.4	Окончание доказательства теоремы 4.1 . . . . .	95
<b>5</b>	<b>БЕСКОНЕЧНЫЕ <math>Z</math>-ГРУППЫ</b>	<b>98</b>
5.1	Общие леммы . . . . .	98
5.2	Характеризация группы $L_2(Q)$ . . . . .	103
5.3	Строение группы $S_0$ . . . . .	110
5.4	Характеризация групп $Sz(Q)$ . . . . .	113
<b>6</b>	<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	<b>120</b>
6.1	Сильно изолированные подгруппы . . . . .	120
6.2	Некоторые следствия теоремы 5.1 . . . . .	126
6.3	Абелевы централизаторы инволюций . . . . .	128
	<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b>	<b>141</b>
	<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b>	<b>146</b>

# Введение

В монографии излагаются результаты авторов и В. Д. Мазурова о бесконечных дважды транзитивных группах подстановок, периодических и смешанных группах с заданными централизаторами инволюций, либо содержащими сильно вложенную или сильно изолированную подгруппу с инволюциями. Большая часть этих результатов получена за последние 10 лет, их доказательства разбросаны по нескольким десяткам статей.

Особая роль инволюции (элемента порядка 2) в теории групп известна давно. Две инволюции всегда порождают прозрачно устроенную группу — так называемую группу диэдра. В работах Р. Брауэра (50-е годы прошлого века) была установлена глубокая взаимосвязь между строением конечной группы и централизаторами её инволюций (см. по этому поводу стр. 10 монографии Д. Горенштейна [5]). Доказано, в частности, что имеется лишь конечное число простых конечных групп с заданным централизатором инволюции. В 1962 г. Д. Томпсон и У. Фейт [29] доказали свою знаменитую теорему о существовании инволюции в любой конечной неразрешимой группе. Эти результаты индуцировали многочисленные работы по классификации конечных простых групп в терминах строения централизаторов инволюций.

Теорема Фейта-Томпсона оставляет четкие следы в классе локаль-

но конечных групп: все подгруппы без инволюций локально конечной группы являются локально разрешимыми. Но в дебрях периодических групп эти следы теряются. Их не найти, например, в группах Новикова-Адяна [1], т. е. свободных группах нечетного периода  $\geq 665$ , в которых каждая конечная подгруппа циклическая, и тем более в простых бесконечных периодических группах без инволюций с циклическими собственными подгруппами. Такие монстры построены А. Ю. Ольшанским [16]. Как черные дыры, они могут втянуть в себя элемент любого нечетного порядка, а вот маленькая инволюция может их взорвать изнутри согласно доказанной в 1972 г. замечательной теореме В. П. Шункова [28] о почти разрешимости периодической группы с конечным централизатором инволюции.

Появилась надежда, что некоторые результаты о конечных группах с инволюциями могут быть перенесены на периодические группы. Но только спустя почти 30 лет В. Д. Мазуровым, а также независимо А. И. Созутовым и Н. М. Сучковым было получено первое описание периодической группы  $G$  с заданными бесконечными централизаторами инволюций. Предполагалось, что централизатор каждой инволюции в группе  $G$  является элементарной абелевой подгруппой. Более того, результат оставался справедливым, если вместо периодичности предполагать лишь наличие в  $G$  конечной инволюции (инволюция  $i$  группы  $G$  называется конечной, если  $|ii^g| < \infty$  для каждого  $g \in G$ ). В этих исследованиях основной анализ был связан со случаем сильной вложенности в  $G$  нормализатора силовской 2-подгруппы.

В теории конечных групп понятие сильно вложенной подгруппы является фундаментальным [5]. Напомним, что собственная подгруппа  $B$