Neue mathematische Theorien der Witwenversicherung.

Страхование вдов.

Von

Dr. Hans Amtmann.

Mit 18 Tabellen.

Verlag von Gustav Fischer in Jena.
1908.

Die Mathematik der Witwenversicherung steht nach der allgemeinen Ansicht der Fachleute noch auf recht unsicherem Boden. Es gibt eine Reihe von Methoden, welche angeblich zum gleichen Ziele führen. Geht man aber näher auf dieselben ein, so zeigt es sich, wie ich wenigstens jetzt annehmen möchte, daß auch nicht eine einzige überhaupt nur der strengen wissenschaftlichen Kritik Stand zu halten vermag.

Aus diesem Grunde hat es der Verfasser versucht, die Mathematik der Witwenversicherung einmal genauer zu prüfen. Es war dabei vor allem die Frage zu entscheiden, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man überhaupt und unbedingt zu operieren habe und ob nicht dann schon in der Sache selbst Anhaltspunkte für einen Zusammenhang der einzelnen Theorien gegeben seien. Tatsächlich dürfte der Grund gefunden worden sein, weshalb bis jetzt keine Methode das leistet, was sie leisten sollte.

Die Behandlung des Gegenstandes führte so ganz von selbst zu neuen Methoden. Diese zeigen im einzelnen die Fehler aller bisherigen und lassen das Problem in einem ganz neuen Lichte erscheinen.

Es schien wegen der Neuheit der Ergebnisse zweckmäßig, den Effekt der wichtigsten neuen Methoden an passenden Beispielen zu zeigen. Die hierbei benützten Wahrscheinlichkeiten sind den Erfahrungen des Oberschlesischen Knappschaftsvereins in den Jahren 1875—1904 entlehnt und finden sich größtenteils veröffentlicht in der Abhandlung: „Zur Mathematik der Pensionsversicherung. Von Dr. Hans Amtmann und Ernst Pfaffenberger, Jena 1907“ — im folgenden kurz zitiert als „Pensionsversicherung“ — woselbst auch die heute bekannten mathematischen Formeln zur Witwenversicherung dargestellt sind. Als Zinsfuß wurden $3\frac{1}{2}\,\%$ gewählt.

1. Die gewöhnliche Überlebensrente.

Unter „selbständiger“ Witwenversicherung versteht man allgemein jenen Zweig der Versicherungsmathematik, welcher sich mit der Versicherung von bereits fertigen „Paaren“ beschäftigt. Die Einzelindividuen, welche das Paar bilden, sind bekannt oder als bekannt supponiert.

Das Grundelement der selbständigen Witwenversicherung ist die „Verbindungsrente“. Ein „Paar“ bezieht eine Rente solange, als es sich nicht durch den Tod eines der beiden Einzelindividuen, d. i. hier Mann oder Frau, auflöst.

Die selbständige Witwenversicherung beruht aber nicht auf der Verbindungsrente, sondern auf der mit ihr allerdings nahe verwandten „Überlebensrente“. Ein Einzelindividuum (Frau) soll auf Lebensdauer eine Rente dann und nur dann beziehen, wenn es ein anderes Einzelindividuum (Mann), mit welchem es zu einem Paar verbunden ist, überlebt.

Wir haben uns deshalb mit der Überlebensrente als dem eigentlichen Teile der selbständigen Witwenversicherung hier näher zu beschäftigen.

Wir betrachten L_x Einzelindividuen der einen und L_y Einzelindividuen der anderen Kategorie. Die Zahl aller überhaupt möglichen Paare, welche dadurch gebildet werden könnten, daß man immer je ein Einzelindividuum der Kategorie L_x mit einem solchen der Kategorie L_y verbunden sich denken kann, beträgt

$$L_{x,\,y} = L_x \cdot L_y.$$

Führt man den Prozeß der Bildung solcher Paare tatsächlich durch, so erhält man freilich nicht $L_x \cdot L_y$, sondern nur L_x, bzw. L_y Paare, je nachdem $L_x \lesseqqgtr L_y$ ist. Aber diese Zahl ist für unsere weiteren Untersuchungen ganz ohne Belang.

Die Zahl der nun überhaupt möglichen Paare $L_{x,\,y}$ können wir als die Basis einer Ausscheideordnung von Paaren (Tod bzw. Verwitwung) mit dem gleichen Rechte ansehen, mit welchem wir z. B. die Zahl l_x als die Basis einer Ausscheideordnung von Aktiven (Tod, bzw. Invalidität) wählen. Für das Grundalter x, y der Ausscheideordnung ist also $L_{x,\,y}$ konstant.

Nun vergegenwärtigen wir uns den Fall einer Ausscheideordnung von Aktiven auf Grund „unabhängiger“ Wahrscheinlichkeiten im Sinne von Karup. Es ist dann diese Ausscheideordnung nach „Pensionsversicherung“ p. 55, Formel 15, gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{aa} &= l_x^{aa} \cdot \left(1 - \mathrm{i}_x - \mathrm{q}_x^{aa}\right) \\ &= l_x^{aa} \cdot \left(1 - q_x^{aa}\right)\left(1 - i_x\right) \end{aligned}$$

wobei

$$\mathrm{i}_x = i_x \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot q_x^{aa}\right)$$
$$\mathrm{q}_x^{aa} = q_x^{aa} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot i_x\right)$$

In ganz analoger Weise müssen wir in der Witwenversicherung vorgehen. Wir definieren folgende Wahrscheinlichkeiten, welche der Natur der Sache nach „unabhängig" im Sinne von Karup sind:

q_x = Wahrscheinlichkeit, daß ein jetzt x-jähr. Einzelindividuum bis zum Ablaufe des Jahres gestorben sei, unbekümmert darum, ob bei seinem Tode das jetzt y-jähr. Einzelindividuum noch lebte oder nicht.

q_y = Wahrscheinlichkeit, daß ein jetzt y-jähr. Einzelindividuum bis zum Ablaufe des Jahres gestorben sei, unbekümmert darum, ob bei seinem Tode das jetzt x-jähr. Einzelindividuum noch lebte oder nicht.

Die Zahl aller Paare, welche nach Ablauf eines Jahres aus der Zahl der

$$\mathrm{L}_{x,\,y} = \mathrm{L}_x \cdot \mathrm{L}_y$$

noch leben, ist, wie ohne Weiteres ersichtlich

$$\mathrm{L}_{x+1,\,y+1} = \mathrm{L}_{x+1} \cdot \mathrm{L}_{y+1}.$$

Es ist aber jedenfalls

$$\mathrm{L}_{x+1} = \mathrm{L}_x \cdot (1 - q_x),$$
$$\mathrm{L}_{y+1} = \mathrm{L}_y \cdot (1 - q_y).$$

Hiernach ist die Ausscheideordnung der Paare allgemein dargestellt durch die allbekannte Gleichung:

$$\mathrm{L}_{x+1,\,y+1} = \mathrm{L}_x \cdot \mathrm{L}_y \cdot (1 - q_x)(1 - q_y).$$

Bei näherer Betrachtung zeigt sich jetzt, daß diese Ausscheideordnung eine solche im Sinne von Karup ist. Bezeichnen wir mit

$\tilde{\mathrm{q}}_x = q_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_y\right)$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Paar bis zum Ablaufe des Jahres sich dadurch auflöst, daß der Mann stirbt.

$\tilde{\mathrm{f}}_x = q_y \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x\right)$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Paar bis zum Ablaufe des Jahres sich dadurch auflöst, daß der Mann verwitwet.

1*