

УДК 510.6
ББК 22.12
А18

Рецензенты:

Калягин В. А. — доктор физико-математических наук, профессор НИУ ВШЭ
Петренко А. К. — доктор технических наук, профессор,
заведующий отделом «Технологии программирования»
Института системного программирования РАН

Научный редактор:

Захаров В. А. — доктор физико-математических наук,
профессор МГУ им. М. В. Ломоносова

А18 **Авдошин С. М., Набебин А. А.**
Дискретная математика. Формально-логические системы и языки. – М.:
ДМК Пресс, 2018. – 390 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-622-3

Книга содержит основные сведения из формально-логических систем. Это функции алгебры логики (булевы функции), теорема Поста о функциональной полноте, k -значные логики, производные булевых функций, аксиоматические исчисления высказываний, предикатов, секвенций, резолюций и язык программирования Пролог. Рассматриваются монадическая логика, конечные автоматы и представимые ими языки, темпоральная логика, аксиоматический язык программирования OBJ3.

В основу книги положен многолетний опыт преподавания авторами дисциплины «Дискретная математика» на факультете бизнес-информатики, на факультете компьютерных наук Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и на факультете автоматизации и вычислительной техники Национального исследовательского университета Московский энергетический институт.

Книга предназначена для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия», а также для ИТ-специалистов и разработчиков программных продуктов.

УДК 510.6
ББК 22.12

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-97060-622-3

© Авдошин С. М., Набебин А. А., 2018
© Оформление, издание, ДМК Пресс, 2018

Содержание

Предисловие	9
Введение	13
Часть I. АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ПРЕДИКАТЫ	27
Глава 1. Алгебра логики	28
1.1. Функции алгебры логики	28
1.2. Формулы. Реализация функций формулами	29
1.3. равносильные преобразования формул	31
1.4. Нормальные формы. Совершенные нормальные формы	33
Совершенные нормальные формы	34
1.5. Минимизация нормальных форм	36
1.5.1. Алгоритм Куайна построения сокращенной ДНФ	38
1.5.2. Алгоритм построения сокращенной ДНФ с помощью КНФ	39
1.5.3. Построение всех тупиковых ДНФ	41
1.5.4. Алгоритм минимизации функций в классе ДНФ	42
1.5.5. Алгоритм минимизации функций в классе КНФ	43
1.5.6. Алгоритм минимизации функций в классе нормальных форм	43
1.6. Минимизация частично определенных функций	45
1.6.1. Алгоритм минимизации частично определенных функций в классе ДНФ	46
1.6.2. Алгоритм минимизации частично определенных функций в классе КНФ	46
1.7. Двойственные функции. Принцип двойственности	49
1.8. Линейные функции	50
1.9. Монотонные функции	53
1.10. Теорема Поста о функциональной полноте	55
1.11. Предполные классы	58
Глава 2. Функции k-значной логики	60
2.1. Функции и отношения	60
2.2. Самодвойственные функции	63
2.3. Монотонные функции	63
2.4. Линейные функции	64
2.5. Функции, сохраняющие разбиение	64
2.6. Классы типа \mathbb{C}	64

4 ❖ Содержание

2.7. Классы типа \mathbb{B}	65
2.8. Сравнение функций двужначной и многозначной логик.....	66
Глава 3. Производные булевой функции в синтезе логических схем.....	67
3.1. Производная булевой функции.....	67
3.2. Синтез логических схем методом каскадов.....	70
3.3. Разложение булевой функции в ряд.....	77
Глава 4. Синтез схем из функциональных элементов.....	80
4.1. Схема из функциональных элементов	80
4.2. Функции Шеннона	82
4.3. Элементарные методы синтеза схем	82
4.4. Синтез мультиплексоров	84
4.5. Элементы функциональной декомпозиции	86
4.6. Обнаружение неисправностей в схемах.....	91
Глава 5. Аксиоматическое исчисление высказываний	94
5.1. Определение исчисления высказываний	94
5.2. Теорема дедукции в исчислении высказываний	98
5.3. Производные правила вывода	100
5.4. Тавтологически истинные и доказуемые формулы.....	105
5.5. Разрешимость, непротиворечивость, полнота, независимость аксиом.....	108
5.6. Формулировка исчисления высказываний с единственным правилом вывода – правилом заключения.....	111
Глава 6. Логика предикатов.....	113
6.1. Предикаты, кванторы.....	113
6.2. Общезначимость, выполнимость, невыполнимость, опровержимость формул логики предикатов.....	115
6.3. Равносильность формул	119
6.4. Нормальные формы.....	121
6.4.1. Префиксная нормальная форма	121
6.4.2. Стандартная форма Сколема.....	122
6.5. Проблема разрешимости в логике предикатов.....	125
6.5.1. Проблема разрешимости \exists -формул.....	126
6.5.2. Проблема разрешимости \forall -формул.....	127
6.5.3. Проблема разрешимости монадической логики	128
6.6. Отношения	130
6.7. Суперпозиция функций.....	132
6.8. Операции Мальцева над функциями.....	133
6.9. Алгебра отношений (реляционная алгебра).....	133
6.10. Алгебра отношений k -значной логики.....	135

Глава 7. Аксиоматическое исчисление предикатов	136
7.1. Определение исчисления предикатов	136
7.2. Теорема дедукции в исчислении предикатов	138
7.3. Непротиворечивость исчисления предикатов	141
7.4. Семантическая полнота исчисления предикатов относительно класса общезначимых формул	142
7.4.1. Непротиворечивые расширения исчисления предикатов	143
7.4.2. Формализмы G и G_k	145
Глава 8. Исчисление секвенций	151
8.1. О правилах вывода в секвенциальном исчислении высказываний	151
8.2. Секвенциальное исчисление высказываний	155
8.3. Секвенциальное исчисление предикатов	158
Глава 9. Метод резолюций в логике предикатов и Пролог	161
9.1. Метод резолюций в логике высказываний	161
9.1.1. Семантическое дерево	162
9.1.2. Правило резолюции	164
9.2. Эрбрановы универсум, базис, интерпретация	167
9.3. Семантические деревья. Теорема Эрбрана	170
9.4. Унификация	174
9.5. Метод резолюций в логике предикатов	177
9.6. Основы Пролога	182
9.6.1. Унификация в Прологе	189
9.6.2. Декларативный и операторный смысл Пролог-программы	191
9.6.3. Бэктрекинг и оператор отсечения	193
9.6.4. Объявление операторов	194
9.7. Примеры программ и вычислений в Прологе	196
9.7.1. Принадлежность элемента списку	196
9.7.2. Первый элемент в списке	199
9.7.3. Последний элемент в списке	200
9.7.4. Следующий элемент в списке	201
9.7.5. Соединение списков	204
9.7.6. Обращение списка	205
9.7.7. Выравнивание списка	206
9.7.8. Добавление элемента в начало списка	206
9.7.9. Удаление первого вхождения данного элемента из списка	207
9.7.10. Удаление всех вхождений данного элемента из списка	207
9.7.11. Замена элемента в списке	210
9.7.12. Быть подсписком в списке	210
9.7.13. Включение множеств	212

6 ❖ Содержание

9.7.14. Равенство множеств	213
9.7.15. Объединение множеств	213
9.7.16. Пересечение множеств	215
9.7.17. Разность множеств.....	215
9.7.18. Декартово произведение множеств	215
9.7.19. Множество всех подмножеств данного множества	216
9.7.20. Удаление всех повторов элементов в списке.....	216
9.7.21. Принадлежность множества списку подмножеств	216
9.7.22. Удаление всех повторов подмножеств в данном списке множеств.....	216
9.7.23. Удаление повторов атомов в списке списков атомов.....	217
9.7.24. Последовательное порождение нумерованных атомов.....	217
9.7.25. Программа построения сокращенной ДНФ по конъюнктивной нормальной форме	217
9.7.26. Программа построения сокращенной ДНФ по конъюнктивной нормальной форме без отрицаний.....	219
9.8. Некоторые встроенные предикаты Пролога	220
9.8.1. Средства управления	220
9.8.2. Классификация термов	221
9.8.3. Унификация термов	221
9.8.4. Сравнение термов.....	221
9.8.5. Арифметические функции	222
9.8.6. Арифметические предикаты	222
9.8.7. Обработка термов.....	223
9.8.8. Работа со строками.....	223
9.8.9. Составление списков	223
9.8.10. Взаимодействие с базой данных	224
9.8.11. Стандартные ввод и вывод	225
9.8.12. Доступ к файлам.....	226
9.8.13. Стандартный доступ к файлам в Прологе.....	226
9.8.14. Движение в файле.....	227
9.8.15. Исполнение системных функций	227
9.8.16. Отладчик (Debugger).....	227
Часть II. МОНАДИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ	230
Глава 10. Конечные автоматы	231
10.1. Автоматы Мили и Мура	231
10.2. Источники	235
10.3. Регулярные языки и регулярные выражения.....	240
10.3.1. Операции Клини и регулярные языки	240
10.3.2. Алгебра регулярных выражений Клини	242
10.4. Теоремы замкнутости для класса автоматов представимых языков	243

10.5. Минимизация числа состояний автомата с выходом	248
10.5.1. Склеивание неразличимых состояний.....	250
10.5.2. Алгоритм минимизации автомата.....	250
10.5.3. Алгоритм разбиения множества состояний на классы неотличимых состояний	254
10.5.4. Алгоритм проверки эквивалентности автоматов	255
Глава 11. Автоматы и сверхъязыки	257
11.1. Макроавтоматы.....	257
11.2. Конкатенация языка и сверхъязыка	259
11.3. Сверхитерация автоматных языков.....	261
11.4. Детерминизация макроисточника.....	264
Глава 12. Проблема униформизации	267
12.1. Языки и операторы	267
12.2. Игры.....	270
12.3. Стратегии	273
12.4. Униформизация конечноавтоматных языков	276
12.4.1. Порядковые векторы и порядковые стратегии	276
12.4.2. Теоремы о порядковых стратегиях.....	278
12.4.3. Пример построения выигрывающего автомата	282
Глава 13. Монадическая логика натуральных чисел	285
13.1. Монадическая логика	285
13.2. Выразимость в монадической логике	287
13.2.1. Макроисточники и монадическая логика	289
13.2.2. Регулярные языки и монадическая логика	289
13.2.3. Общерегулярные языки и монадическая логика	290
13.3. Специальная префиксная форма	290
13.4. Синтез автомата по формуле монадической логики.....	292
13.5. Алгоритмическая разрешимость монадической логики.....	294
Глава 14. Темпоральная логика.....	296
14.1. Пропозициональная темпоральная логика.....	296
14.2. Интерпретация формул.....	297
14.3. Общезначимость, выполнимость, опровержимость, невыполнимость	299
14.4. Другие темпоральные операторы.....	302
14.5. Аксиоматическая система	304
14.6. Спецификация свойств формулами.....	305
14.7. Спецификация взаимодействия и параллелизма.....	306

Глава 15. Аксиоматический язык программирования OBJ3	310
15.1. Описание языка.....	310
15.2. Спецификация объекта.....	311
15.3. Сорта и подсорта.....	312
15.4. Импорт модулей.....	312
15.5. Встроенные сорта.....	314
15.6. Декларация атрибутов.....	314
15.7. Приоритет.....	315
15.8. Параметризованное программирование.....	315
15.9. Теории.....	316
15.9.1. Программная спецификация FIELD алгебраического поля.....	316
15.9.2. Программная спецификация PROPC пропозиционального исчисления.....	317
15.9.3. Программная спецификация SET-NAT множества натуральных чисел.....	318
15.9.4. Программная спецификация obj WORDTREE дерева слов.....	319
15.9.5. Программная спецификация WORDSTACK словарого стека.....	320
15.9.6. View.....	321
15.9.7. Инстанциация.....	321
15.9.8. Параметризованная теория линейного векторного пространства.....	321
15.9.9. Параметризованный модуль obj ORD-PAIR пар вида (натуральное число, слово).....	322
15.9.10. Параметризованный модуль SEQUENCE[X :: ELEMS] списков натуральных чисел и списков слов.....	323
Приложение 1. Логика высказываний и предикатов. Пролог	325
Приложение 2. Конечные автоматы	357
Приложение 3. Анализ конечных автоматов	364
Приложение 4. Синтез конечных автоматов	380
Литература	383
Обозначения	386