

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»

Р.Н. Зарипов, Г.П. Чугунова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Теория функций комплексной переменной.

Основы операционного исчисления

Учебное пособие

Казань
КГТУ
2008

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

Зарипов, Р.Н. Специальные разделы математики. Теория функций комплексной переменной. Основы операционного исчисления : учебное пособие /Р.Н. Зарипов, Г.П. Чугунова – Казань : Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2008. – 115с.

ISBN 978-5-7882-0522-9

Рассмотрены основные понятия и методы специальных разделов математики – теория функций комплексной переменной и основы операционного исчисления, которые широко применяются при математическом моделировании различных процессов в технике и технологиях. Для формирования практических навыков приводится большое количество примеров.

Предназначено для студентов механических специальностей, магистров и аспирантов, использующих математические методы и модели в процессе обучения и в своей профессиональной деятельности.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного технологического университета.

Рецензенты: зав. каф. математики ТИСБИ, проф.
проф. каф. высшей математики КГЭУ

В.И. Заботин,
Ф.Н. Гарифьянов.

ISBN 978-5-7882-0522-9

© Зарипов Р.Н., Чугунова Г.П., 2008.

© Казанский государственный технологический университет, 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	9
1. Комплексные числа и действия над ними	9
1.1. Понятие комплексного числа	9
1.2. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа	10
1.3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	11
1.4. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показа- тельной формах	14
2. Функции комплексной переменной	16
2.1. Области и их границы на комплексной плоскости	16
2.2. Понятие функции комплексной переменной	19
2.3. Основные элементарные функции	22
2.4. Предел и непрерывность функции комплексной переменной	26
3. Дифференцирование функций комплексной переменной. Условия Коши - Римана	28
3.1. Производная функции комплексной переменной. Аналитические функции	28
3.2. Гармонические сопряжённые функции	30
3.3. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной	34
3.4. Конформные отображения	37
Понятие о конформном отображении	37
Свойства отображений, осуществляемых некоторыми элементарными функциями	38

4. Интегрирование функций комплексной переменной	40
4.1. Интеграл по комплексной переменной	40
Определение интеграла	40
Основные свойства интеграла по комплексной переменной	41
Способы вычисления интегралов	42
Примеры вычисления интегралов	43
4.2. Основная теорема Коши. Интегральная формула Коши	44
Теорема Коши	44
Теорема Коши для многосвязной области	44
Интегральная формула Коши	45
Примеры применения интегральной формулы Коши для вычисления интегралов	47
5. Ряды в комплексной плоскости	47
5.1. Числовые и степенные ряды	47
5.2. Ряд Тейлора	49
5.3. Ряд Лорана	51
5.4. Нули функции. Изолированные особые точки	54
Нули аналитической функции	54
Классификация особых точек	54
Связь между нулём и полюсом функции	55
6. Вычеты функции и их применение	57
6.1. Основная теорема о вычетах (теорема Коши) и вычисление вычетов	57
6.2. Примеры вычисления вычетов	59
6.3. Применение вычетов к вычислению интегралов	60
Контурные интегралы	60
Определённые интегралы от периодических функций	61
Несобственные интегралы	62
7. Функции комплексной переменной в теории поля	65

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	67
1. Предмет операционного исчисления	67
2. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	68
3. Единичная функция Хевисайда. Импульсная функция Дирака	71
4. Свойства преобразования Лапласа	73
4.1. Линейность	73
4.2. Подобие	73
4.3. Смещение (затухание)	74
4.4. Запаздывание	74
5. Таблица изображений некоторых оригиналов	75
6. Примеры использования таблицы изображений	78
7. Основные правила операционного исчисления	80
7.1. Дифференцирование оригинала	80
7.2. Интегрирование оригинала	82
7.3. Дифференцирование изображения	83
7.4. Интегрирование изображения	84
7.5. Умножение изображений (свёртка функций)	85
8. Восстановление оригинала по изображению	87
8.1. Разложение на простейшие дроби	87
8.2. Теоремы разложения	88
8.3. Использование формул Римана – Меллина и свёртки двух функций .	91
9. Приложения операционного исчисления	92
9.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	92
9.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	96
9.3. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений . .	99

10. Применение операционного исчисления к исследованию процессов в электрических цепях	101
10.1. Задача с нулевыми начальными условиями	101
10.2. Задача с ненулевыми начальными условиями	103
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	105
ОТВЕТЫ	110
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	114
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	115