

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

С.А. Кащенко

Устойчивость уравнений второго порядка
с периодическими коэффициентами

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальностей Математика и
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2005

УДК 517.925
ББК В161.61я73
К 31

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2004 года*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Н.Х. Розов;
кафедра математики физического факультета Московского
государственного университета им. М.В. Ломоносова

Кащенко, С.А. Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами: Учебное пособие / С.А. Кащенко;
К 31 Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – 216 с.
ISBN 5-8397-0362-1

Изложена теория устойчивости решений линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, базирующаяся на теории зон устойчивости А.М. Ляпунова. В качестве приложений асимптотическими методами исследованы вопросы устойчивости для широких классов регулярно и сингулярно возмущенных уравнений, в том числе уравнений с точками поворота. Рассмотрены классические вопросы построения функции Грина и вывода асимптотических законов распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач.

Учебное пособие по дисциплине „Дифференциальные уравнения“ (блок ОПД) предназначено студентам специальностей 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика очной формы обучения.

Рис. 3. Библиогр.: 36 назв.

УДК 517.925
ББК В161.61.я73

ISBN 5-8397-0362-1

© Ярославский
государственный университет
им. П.Г. Демидова, 2005
© Кащенко С.А., 2005

Оглавление

Введение	6
1 Теория зон устойчивости	7
§ 1.1. Теоремы сравнения	7
§ 1.2. Краевые задачи Штурма - Лиувилля	10
§ 1.3. Уравнения с периодическими коэффициентами	14
§ 1.4. Теория зон устойчивости А.М. Ляпунова	18
§ 1.5. Об одном критерии неустойчивости решений	28
§ 1.6. Распространение теории зон устойчивости на несамосопряженный случай	42
2 Устойчивость решений уравнений с близкими к постоянным коэффициентами	49
§ 2.1. Уравнения с близкими к нулевым коэффициентами . . .	49
§ 2.2. Уравнения с близкими к постоянным коэффициентами .	53
§ 2.3. Параметрический резонанс	58
3 Устойчивость решений сингулярно возмущенных уравнений	61
§ 3.1. Устойчивость решений уравнений без точек поворота . .	61
§ 3.2. Уравнения с точками поворота	65
§ 3.3. Уравнения со знакопеременным и гладким коэффициентом $p(t)$	78
4 Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач	84

§ 4.1. Асимптотика собственных значений для уравнений без точек поворота	84
§ 4.2. Асимптотика собственных значений при условии $r(t) \geq 0$	87
§ 4.3. Асимптотика собственных значений в случае знакопеременной $r(t)$	95
5 Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении	103
§ 5.1. Постановка задачи и редукция к специальному уравнению второго порядка	103
§ 5.2. Исследование уравнений первого приближения при достаточно больших значениях расстройки между частотами внешних возмущений	106
§ 5.3. Исследование уравнения первого приближения при достаточно малой расстройке между частотами внешних возмущений	107
6 Функции Грина периодической краевой задачи	111
§ 6.1. Функции Грина первого порядка	111
§ 6.2. Функция Грина уравнения второго порядка	115
§ 6.3. Вырожденные случаи	118
§ 6.4. О приближенном вычислении первых собственных значений	121
7 Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота	127
§ 7.1. Постановка задачи и формулировка основного результата	128
§ 7.2. Обоснование предельного свойства функции $\bar{\varepsilon}(b)$	136
§ 7.3. Вспомогательное утверждение	141
§ 7.4. Обоснование теоремы 7.1.1	154
§ 7.5. Обобщение результата	156
8 Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота	160
§ 8.1. Постановка задачи и формулировка результата	160
§ 8.2. Вспомогательные утверждения	166
§ 8.3. Обоснование теоремы 8.1.1	180

9	Асимптотика собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота	183
§ 9.1.	Постановка задачи и формулировка результатов в самосопряженном случае	184
§ 9.2.	Обоснование теоремы 9.1.1 для собственных значений $\lambda_1^+(\varepsilon)$ и $\lambda_1^-(\varepsilon)$	186
§ 9.3.	Вспомогательное утверждение	187
§ 9.4.	Завершение доказательств приведенных теорем	191
§ 9.5.	Постановка задачи и основные результаты в несамосопряженном случае	193
§ 9.6.	Несамосопряженный случай: вспомогательное утверждение	196
§ 9.7.	Обоснование теоремы 9.5.1	200
§ 9.8.	Обоснование соотношений (9.5.8)	203
§ 9.9.	Обоснование соотношений (9.5.7)	204
§ 9.10.	Завершение доказательств теорем несамосопряженного случая	209
	Литература	212