

УДК 539.3  
ББК 22.251  
Б 247

**Бардзокас Д. И., Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л.**

Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах: В 5 т. — Т. 1. Математический аппарат физических и инженерных наук. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — 864 с.

Первый том монографии является математическим введением в методы решения современных научных задач физики, механики сплошной среды, техники. В доступной форме излагаются наиболее востребованные разделы математики: элементы теории аналитических функций комплексного переменного, некоторые аспекты математической физики, основы функционального анализа, теория регулярных интегральных, сингулярных и гиперсингулярных уравнений, а также некоторые их приложения к решению целого круга задач.

Данный том совместно с последующими томами планируемой пятитомной серии может служить учебным пособием для студентов механико-математических и физических факультетов, а также вузов с повышенной математической подготовкой. Эта книга может быть также востребованной специалистами в области прикладной математики, механики связанных физических полей, физики твердого тела и т. п.

Ил.: 154. Табл.: 9. Библ.: 470.

**ISBN 978-5-93972-781-5**

© Д. И. Бардзокас, Л. А. Фильштинский, 2010

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	8
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ .....	15
1.1. Основные определения. Теорема Коши .....	15
1.2. Интегральные представления .....	17
1.3. Предельные значения интеграла типа Коши и некоторых интегралов со специальными ядрами .....	22
1.4. Асимптотика интегралов типа Коши .....	25
1.5. Представления аналитических функций рядами .....	30
1.6. Структурные представления мероморфных и целых функций .....	37
1.7. Некоторые специальные мероморфные и целые функции. Эллиптические функции .....	42
1.8. Конформные отображения .....	65
1.9. Вычисление определенных интегралов от однозначных и многозначных функций .....	71
Литература к главе 1 .....	84
ГЛАВА 2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ И МЕТАГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ .....	86
2.1. Гармонические функции в $R^2$ .....	86
2.2. Гармонические функции в $R^3$ .....	109
2.3. Граничные задачи для уравнения $\Delta u + cu = f$ .....	116
2.4. Цилиндрические функции. Некоторые формулы и таблицы .....	140
Литература к главе 2 .....	156
ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА .....	158
3.1. Линейные нормированные пространства .....	158
3.2. Интеграл Лебега .....	172
3.3. Пространство Лебега $L^1[a, b]$ , $p$ -пространства .....	179
3.4. Абстрактное гильбертово пространство .....	183
3.5. Приложения в задачах управления упругой системой .....	200
3.6. Пространства Соболева .....	205
3.7. Функции .....	211
3.8. Линейные операторы в банаховых пространствах .....	217
3.9. Линейные функционалы в банаховых пространствах .....	233
3.10. Проблема моментов и некоторые приложения .....	255
3.11. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $H$ .....	264
3.12. Матричное представление сопряженного оператора в пространстве с базисом .....	272
3.13. Уравнения .....	275
Приложение А. Метрические пространства .....	293
Приложение В. $P$ -неравенства .....	323
Литература к главе 3 .....	327

ГЛАВА 4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ .....	329
4.1. Некоторые примеры и соображения к мотивации введения и использования обобщенных функций .....	332
4.2. Пространство основных функций $D$ .....	336
4.3. Пространство обобщенных функций $D'$ .....	341
4.4. Регулярные обобщенные функции .....	344
4.5. Сингулярные обобщенные функции .....	346
4.6. Преобразования переменных .....	350
4.7. Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций .....	353
4.8. Дельтаобразные последовательности .....	367
4.9. Свертка обобщенных функций .....	370
4.10. Решения дифференциальных уравнений с правой частью .....	381
4.11. Обобщенные функции медленного роста .....	384
4.12. Обобщенные функции с компактным носителем .....	390
4.13. Конечные части. Определенные интегралы .....	392
4.14. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста .....	395
4.15. Преобразование Фурье в пространстве обобщенных функций $D'$ .....	403
4.16. Пространства распределений $L^2(R^n), L^1(R^n), L^p(R^n)$ .....	408
4.17. Преобразование Лапласа обобщенных функций .....	414
4.18. Приложение техники обобщенных функций к решению уравнений .....	419
4.19. Регуляризация расходящихся интегралов .....	430
4.20. Обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных .....	435
4.21. Уравнения гиперболического типа .....	437
4.22. Уравнения эллиптического типа .....	440
4.23. Уравнения параболического типа .....	443
4.24. Задача Коши .....	444
Приложение к главе 4. Применения обобщенных функций в упругости .....	452
Литература к главе 4 .....	482
ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	485
5.1. Исходные определения и обозначения .....	485
5.2. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных приближений .....	490
5.3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами .....	495
5.4. Уравнения Фредгольма. Общий случай .....	500
5.5. Симметричные интегральные уравнения .....	506
5.6. Уравнения Фредгольма 1-го рода .....	528
5.7. Применение симметричных интегральных уравнений в задачах на собственные значения .....	532
5.8. Интегральные уравнения теории потенциала .....	539
5.9. Интегральные уравнения граничных задач теплопроводности .....	549
5.10. Интегральные уравнения теории упругости .....	553
5.11. Некоторые типы нелинейных интегральных уравнений .....	562

5.12. Метод Ньютона для нелинейных операторов .....	572
5.13. Бифуркация решений .....	580
Литература к главе 5 .....	585
<b>ГЛАВА 6. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....</b>	<b>588</b>
6.1. Предварительные сведения .....	588
6.2. Краевая задача Римана .....	595
6.3. Одномерные сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши на замкнутом контуре .....	600
6.4. Регуляризация полного СИУ. Теоремы Ф. Нетера .....	604
6.5. Регуляризация СИУ по Карлеману–Векуа .....	609
6.6. Системы сингулярных интегральных уравнений .....	615
6.7. Случай разомкнутых контуров .....	621
6.8. Применение метода ортогональных многочленов к решению интегральных уравнений .....	631
6.9. Интегральные уравнения с ядром Гильберта .....	635
6.10. Интегральные уравнения с неподвижными особенностями .....	639
6.11. Многомерные сингулярные интегралы и сингулярные интегральные уравнения .....	642
Литература к главе 6 .....	654
<b>ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ .....</b>	<b>657</b>
7.1. Типы уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов .....	657
7.2. Интегральное преобразование Фурье .....	658
7.3. Связь между интегральными преобразованиями Меллина, Лапласа и Фурье ....	663
7.4. Интегродифференциальное уравнение на оси .....	665
7.5. Интегральное уравнение типа Винера–Хопфа .....	666
Литература к главе 7 .....	676
<b>ГЛАВА 8. ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....</b>	<b>678</b>
8.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару в плоских задачах .....	679
8.1.1. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на отрезке прямой .....	679
8.1.2. Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, определенных на гладком разомкнутом контуре .....	685
8.1.3. Вычисление конечной части интегралов по Адамару с постоянной плотностью .....	690
8.1.4. Вычисление конечной части интегралов по Адамару для различных аппроксимаций плотности .....	691
8.2. Интегралы в смысле конечной части по Адамару в пространственных задачах .....	695
8.2.1. Вычисление нормальной производной гармонического потенциала двойного слоя по плоской области .....	695
8.2.2. Вычисление нормальной производной потенциала двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова .....	696
8.2.3. Эквивалентность интегральных представлений нормальной производной потенциала двойного слоя .....	697

8.2.4. Вычисление интегралов в смысле конечного значения по Адамару по плоскому многоугольнику .....	699
8.2.5. Вычисление гиперсингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью .....	703
8.3. Обобщенный потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова .....	705
8.4. Методы численного решения гиперсингулярных уравнений .....	711
8.4.1. Плоские задачи .....	711
8.4.2. Пространственные задачи .....	712
Литература к главе 8 .....	716
<b>ГЛАВА 9. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ .....</b>	<b>717</b>
9.1. Плоская задача теории упругости .....	718
9.2. Некоторые плоские задачи теории упругости для изотропной области с дефектами типа трещин и включений .....	723
9.3. Численное решение плоских задач теории упругости для тел с дефектами .....	745
9.4. Теория регулярно армированного волокнистого композитного материала .....	763
9.5. Математическое моделирование эксперимента по определению механических характеристик наноразмерных объектов .....	773
9.6. Плоские задачи теории упругости для анизотропной области с дефектами .....	778
9.7. Классические плоские термоупругие задачи .....	792
9.8. Неклассические модели теплопереноса .....	807
9.9. Плоская задача термоупругости для анизотропной среды .....	824
9.10. Пространственная задача связанной термоупругости .....	832
9.11. Сопряженные электроупругие поля в пьезокерамическом слое с полостью .....	846
9.12. Гармонические и импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел .....	849
Литература к главе 9 .....	858