

А.И. Жданов

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ  
НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

УДК 519.6(075)+512.64(075)  
ББК 22.19+22.143  
Ж 422

**Жданов А.И.**

Введение в методы решения некорректных задач: Учеб. пособие. –  
Изд-во Самарского гос. аэрокосмического ун-та, 2006. – 87 с.

ISBN 5-7883-0472-6

Рассмотрены основные понятия теории некорректных задач. В основном изложение ведется для случая конечномерных задач. Это дает возможность получить важнейшие начальные понятия о неустойчивости вычислительных задач, а также научиться решать наиболее практически важные некорректные задачи на компьютере. Для решения неустойчивых вычислительных задач данного класса рассмотрены современные наиболее эффективные вычислительные алгоритмы. Эти алгоритмы являются универсальными и могут быть использованы для решения широкого класса неустойчивых конечномерных линейных задач.

Предназначено для студентов обучающихся по специальностям "Прикладная математика и информатика", "Прикладная математика и физика" и др., а также для специалистов, применяющих в своей деятельности идеи и методы решения некорректных задач на компьютерах.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	5
<b>1 Вспомогательные сведения</b>	<b>7</b>
1.1 Арифметические пространства . . . . .	7
1.2 Матричная алгебра . . . . .	11
1.3 Нормы векторов и матриц . . . . .	17
1.4 Сингулярное разложение матриц . . . . .	22
<b>2 Нормальные решения и псевдорешения</b>	<b>27</b>
2.1 Псевдорешения линейных систем . . . . .	27
2.2 Линейная задача наименьших квадратов . . . . .	30
2.3 Псевдообращение . . . . .	32
2.4 Вычисление псевдообратных матриц . . . . .	40
2.5 Типовые примеры . . . . .	42
<b>3 Вычисление псевдорешений</b>	<b>45</b>
3.1 Определение множества чисел с плавающей точкой . . . . .	45
3.2 Обусловленность и числа обусловленности . . . . .	46
3.2.1 Обусловленность задачи . . . . .	47
3.2.2 Абсолютное число обусловленности . . . . .	47
3.2.3 Относительное число обусловленности . . . . .	48
3.2.4 Обусловленность матрично-векторного умножения . . . . .	49
3.2.5 Число обусловленности матрицы . . . . .	51
3.3 Теория возмущений . . . . .	52
3.3.1 Системы с квадратными невырожденными матрицами . . . . .	52
3.3.2 Теория относительных возмущений . . . . .	56
3.3.3 Теория возмущений для задачи наименьших квадратов . . . . .	60
3.4 Вычисление нормальных псевдорешений линейных систем	62

<b>4</b>	<b>Вычисление решений приближенных систем</b>	<b>65</b>
4.1	Корректность вычислительной задачи . . . . .	65
4.2	Постановка задачи . . . . .	67
4.3	Регуляризация систем на основе расширенных систем . .	69
4.4	Обусловленность вычислительной задачи . . . . .	71
4.5	Метод мнимого сдвига спектра . . . . .	73
4.6	Численные примеры . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Идентификация нестационарных AR-моделей</b>	<b>77</b>
5.1	Стохастические непрерывные модели . . . . .	77
5.2	Стохастические дискретные модели . . . . .	80
5.3	Постановка задачи идентификации . . . . .	82
	Литература . . . . .	85

## Предисловие

На простейших примерах в учебном пособии подробно исследуется феномен неустойчивости вычислительных задач и даются основные подходы по преодолению численных "катастроф". При решении некоторых математических задач встречаются ситуации, когда казалось бы, незначительные возмущения (погрешности) исходных данных (например, при записи их в компьютер) влекут катастрофические последствия в результате. Это явление связано с неустойчивостью (некорректностью) задачи – малые изменения данных задачи вызывают большие изменения в решении. Для так называемых хорошо поставленных проблем традиционные вычислительные методы работают вполне надежно, однако их использование для решения неустойчивых (некорректно поставленных) задач не безопасно.

Основная задача, которая рассматривается в данном учебном пособии, – это решение приближенных *систем линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ).

Наличие неизбежных погрешностей (неточностей) в задании коэффициентов как в правой так и в левой (матричном операторе) её частях, порождённых конечной точностью представления чисел в ЭВМ приводит к неопределённости искомого решения.

Как было указано А.Н. Тихоновым, при построении решения СЛАУ принципиальным фактором является наличие погрешности задания правой части и матрицы. Классические алгоритмы решения СЛАУ, основанные на концепции абсолютной точности, при наличии погрешностей не могут быть положены в основу универсальных вычислительных программ для ЭВМ в силу неустойчивости к погрешностям.

В учебном пособии рассматриваются два близких, но в тоже время различных, класса проблем: плохо обусловленные и некорректные задачи, которые с точки зрения применимости численных методов, являются аномальными. Любой "нормальный" метод (алгоритм), предназначенный для решения "нормальной" (корректной) задачи, как правило, для них работать не будет: либо результат будет неправильным, либо произойдет останов ЭВМ в случае, когда выполнить требуемое программой действие невозможно (разделить на 0 и т.п.).

Подобные задачи возникают во многих областях науки и техники: геофизике, радиоастрономии, спектроскопии, экономике, медицинской и технической диагностике, обработке и интерпретации данных физических экспериментов. Тем не менее долгое время считалось, что подоб-