УДК 532.65:51-37 DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060

Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде

© Юй Чжаокай, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена осесимметричная задача об определении форм равновесия жидкости в тороидальных баках космических аппаратов в условиях, близких к невесомости. При отсутствии значительных массовых гравитационных сил поведение жидкого топлива в баках начинают определять силы поверхностного натяжения, представляющие собой межмолекулярные силы на границе двух фаз. На основе принципа стационарности потенциальной энергии получены условия равновесия замкнутой системы жидкость — газ — твердая стенка в условиях микрогравитации. Приведены система дифференциальных уравнений, определяющая форму равновесия жидкости в тороидальных баках, условие Дюпре — Юнга, условие соприкосновения свободной поверхности с твердой стенкой и условие сохранения объема жидкости. Количественно оценено влияние различных параметров, таких как угол смачивания, число Бонда, соотношение радиусов осевой окружности и окружности меридиана тора и относительный объем заполнения баков жидкостью, на форму равновесия капиллярной жидкости. Проведенное исследование форм равновесия жидкого топлива позволяет разработать рекомендации по проектированию заборных устройств топливных баков в ракетно-космической технике. Полученная равновесная поверхность представляет собой невозмущенную границу области, занимаемой жидким топливом, и поэтому является необходимой информацией для дальнейшего исследования динамики космических аппаратов.

Ключевые слова: *капиллярная жидкость, тороидальный сосуд, равновесная свободная поверхность, метод Рунге — Кутты*

Введение. В условиях космического полета возникают проблемы обеспечения надежного питания двигателя топливом. Проблемы связаны с необходимостью многоразового включения двигателя и могут возникать как в условиях невесомости, так и при отрицательных и боковых перегрузках, а также в случаях импульсного режима работы двигателей. Для решения подобных проблем необходимо знать положение равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости. Анализ приведенных в работах [1–7] методов теоретического исследования равновесных капиллярных поверхностей показывает, что в современной гидродинамике недостаточно разработаны методы численного моделирования равновесия двухсвязных, несвязных, а также сильно искривленных односвязных капиллярных поверхностей. В работе [8] подробно рассмотрено решение задачи о равновесии капиллярной жидкости в сосуде, имеющем форму коаксиального цилиндра, на основе метода Рунге — Кутты — Фельберга. Работа [9] посвящена осесимметричной задаче об эволюции свободной поверхности жидкости по мере заполнения емкости тороидальной формы при невесомости с применением итерационно-разностного подхода. Исследование формы равновесия капиллярной жидкости в тороидальных сосудах актуально, так как тороидальные баки, в связи с их преимуществами в компоновке, все больше применяются в космических аппаратах.

Постановка задачи. Введем цилиндрическую систему координат $Or\eta z$, начало координат O и ось Oz которой приведены на рис. 1. Используем длину дуги s для описания формы свободной поверхности жидкости и угол θ для описания поверхности твердой стенки сосуда.

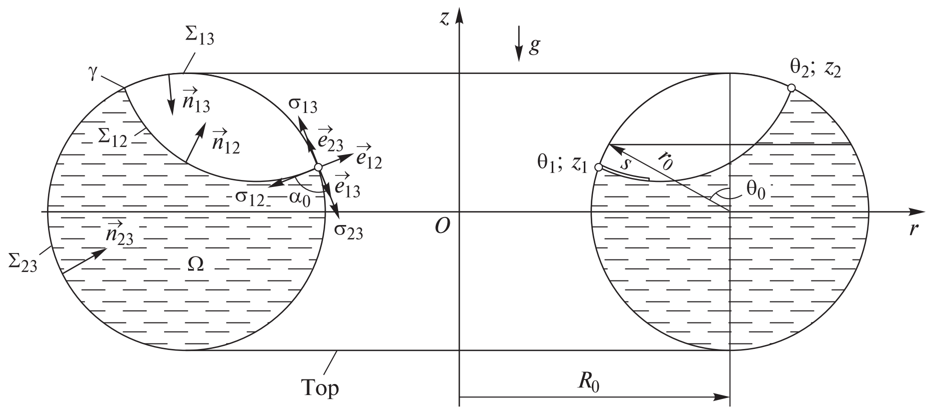

Рис. 1. Расчетная схема для определения форм равновесия жидкости в тороидальном сосуде

Топливные емкости представляют собой замкнутую механическую систему жидкость — газ — твердая стенка. Пренебрегая плотностью потенциала массовых сил газа, запишем выражение для потенциальной энергии системы с учетом поверхностного взаимодействия:

$$U = \sigma_{12}\left|\Sigma_{12}\right| + \sigma_{23}\left|\Sigma_{23}\right| + \sigma_{13}\left|\Sigma_{13}\right| + \rho\int\limits_{\Omega}\Pi\left(\vec{x}\right)d\Omega,$$

где σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} — коэффициенты поверхностного натяжения на границах разделов газ — жидкость, жидкость — твердая стенка и газ — твердая стенка соответственно; $\left|\Sigma_{12}\right|, \left|\Sigma_{23}\right|, \left|\Sigma_{13}\right|$ — площади соответствующих поверхностей; ρ — плотность жидкости; $\Pi\left(\vec{x}\right) = gz$ — плотность потенциала массовых сил жидкости; Ω — объем, занимаемый жидкостью.

Материал стенок топливной емкости, жидкость и газ будем считать однородными, т. е. коэффициенты σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} — постоянные величины.

Согласно принципу стационарности потенциальной энергии, система находится в равновесии только тогда, когда $\delta U = 0$ для всех допустимых вариаций свободной поверхности Σ_{12}, сохраняющих условия несжимаемости и непротекания жидкости на твердой стенке:

$$\delta \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Sigma_{12}} (\vec{n}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\Sigma_{12} = 0; \; \vec{n}_{23} \cdot \delta\vec{x} = \vec{n}_{13} \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \left(\Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}\right),$$

где $\delta\vec{x}$ — вектор малого смещения точек поверхности Σ_{12}.

По формуле Гаусса имеем следующие соотношения:

$$\delta\left|\Sigma_{12}\right| = \int_{\gamma} (\vec{e}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\gamma - \int_{\Sigma_{12}} 2H_{12} (\vec{n}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\Sigma_{12};$$

$$\delta\left|\Sigma_{23}\right| = -\delta\left|\Sigma_{13}\right| = \int_{\gamma} (\vec{e}_{23} \cdot \delta\vec{x}) d\gamma,$$

где γ — линия трехфазного контакта; H_{12} — средняя кривизна поверхности Σ_{12}.

Вариация потенциала массовых сил

$$\delta \int_{\Omega} \Pi\left(\vec{x}\right) d\Omega = \int_{\Sigma_{12}} \Pi\left(\vec{x}\right) (\vec{n}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\Sigma_{12}.$$

Согласно правилу неопределенных множителей Лагранжа, примененному к условию несжимаемости, существует такая постоянная c, что для всех $\delta\vec{x}$, удовлетворяющих только одному условию непротекания, имеем [1, 2]

$$\delta U + c \int_{\Sigma_{12}} (\vec{n}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\Sigma_{12} = 0.$$

Таким образом, вариационная постановка задачи равновесия системы примет вид

$$\int_{\Sigma_{12}} \left[\rho\Pi\left(\vec{x}\right) + c - \sigma_{12} \cdot 2H_{12}\right] (\vec{n}_{12} \cdot \delta\vec{x}) d\Sigma_{12} +$$
$$+ \int_{\gamma} \left[\sigma_{12} \cos\alpha_0 + \left(\sigma_{23} - \sigma_{13}\right)\right] (\vec{e}_{23} \cdot \delta\vec{x}) d\gamma = 0, \qquad (1)$$

где α_0 — угол смачивания жидкости на твердой стенке.

Из вариационной постановки задачи равновесия (1) вытекают условия равновесия гидромеханической системы газ — жидкость — твердая стенка:

$$\rho\Pi(\vec{x}) + c - \sigma_{12} \cdot 2H_{12} = 0 \qquad (\Sigma_{12}); \tag{2}$$

$$\sigma_{12}\cos\alpha_0 + (\sigma_{23} - \sigma_{13}) = 0 \qquad (\gamma). \tag{3}$$

Равенство (1) играет роль дифференциального уравнения поверхности и может быть записано в безразмерной форме:

$$\sigma_{12} \cdot 2H_{12} = \rho g z + c \to 2H = \mathrm{Bo}\bar{z} + C, \tag{4}$$

где $H = H_{12} r_0$; $\mathrm{Bo} = \left(\rho g r_0^{\,2}\right) / \sigma_{12}$ — число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения; $\bar{z} = z / r_0$ (в дальнейшем черту в обозначении безразмерных координат будем опускать).

Задача о нахождении формы равновесной поверхности сводится к построению решения уравнения (4) при граничном условии Дюпре — Юнга и условии сохранения объема жидкости. Случай $\mathrm{Bo} = 0$ приводит к известной в дифференциальной геометрии задаче об изучении поверхности с постоянной средней кривизной.

Для применения численного метода Рунге — Кутты преобразуем уравнение (4) в систему дифференциальных уравнений первого порядка и будем считать далее все величины безразмерными:

$$\begin{cases} r'(s) = u(s); \\ z'(s) = v(s); \\ u'(s) = -v(s)\left(\mathrm{Bo}z(s) + C - \dfrac{v(s)}{r(s)}\right); \\ v'(s) = u(s)\left(\mathrm{Bo}z(s) + C - \dfrac{v(s)}{r(s)}\right). \end{cases}$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$r(0) = \delta - \sin\theta_1; \; z(0) = \cos\theta_1;$$

$$u(0) = -\cos(\alpha_0 + \theta_1); \; v(0) = -\sin(\alpha_0 + \theta_1),$$

где $\delta = R_0 / r_0$.

Условия соприкосновения свободной поверхности с твердой стенкой

$$l(s_0) = [\,\delta - r(s_0)]^2 + z(s_0)^2 = 1,$$

где l — расстояние между центром малого круга и линией смачивания.