

К ТЕОРИИ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРЬЯНТОВ.

Л. Мандельштам, А. Андронов и М. Леонтович.

Настоящая работа посвящена выяснению некоторых вопросов теории адиабатических инвариантов. Понятие адиабатического инварианта мы трактуем здесь в рамках классической механики и не касаемся его применений к статистической механике и теории атома.

В определении адиабатического инварианта в следующем пункте, как нам кажется, нет полной ясности. Определяя понятие адиабатического воздействия, Борн (Born), напр., требует: «Wir betrachten als adiabatische Änderung des Systems eine solche, die erstens keine Beziehung zu der Periode des ungestörten Systems hat, und...»¹

(Другие авторы формулируют соответствующее требование несколько иначе. Sommerfeld (At. und Sp. 3 Aufl., p. 376) пишет: «die unsystematische, gegenüber den Bewegungsphasen ungeordnete Art der Einwirkung». К р у т к о в (Ж. Р. Ф.-Х. О., 50, 114, 1921) рассматривает скорость изменения параметра постоянной. К n e s e r. (Math. Ann. 91, 155, 1924), не ограничивает вида зависимости параметра от времени, но установленное им определение инвариантности, как станет видно из дальнейшего, требует известного уточнения).

Это несколько неопределенное ограничение должно между прочим исключить случай такого воздействия, когда имеет место нечто в роде резонанса. Для случая движения маятника в периодически меняющемся поле тяжести, рассмотренном с этой точки зрения Андроновым и Леонтовичем,² возможен как раз такой «параметрический резонанс» (нестабильное движение). Нам представлялось поэтому интересным для выяснения этого вопроса рассмотрение этого случая с точки зрения теории адиабатических инвариантов. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, оказалось необходимым детализировать понятие адиабатического инварианта. В § 1 мы даем (для стрелки с одной степенью свободы) определение адиабатического инварианта в таком несколько детализованном виде. В дальнейшем оно поясняется примерами. Мы думаем, что при таком более строгом рассмотрении этого вопроса исчезают многие неясности в теории адиабатических инвариантов.

¹ Vorlesungen über Atommechanik, p. 64.

² Ж. Р. Ф. Х. О., 59, 429, 1927.

§ 1.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, определяемую функцией Лагранжа

$$L[y, \dot{y}, a],$$

где y — координата определяющая положение системы, a — параметр.

Рассматривая реопараметрическое движение, примем, что параметр a определенным образом зависит от времени.

Вводя для удобного перехода к пределу новый параметр μ , имеем

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Мы предполагаем, что $a\left(\frac{t}{\mu}\right)$ непрерывная, дифференцируемая функция.

Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x,$$

имеем

$$\begin{aligned} a &= a(x); \\ \dot{a} &= \frac{1}{\mu} \frac{da}{dx} \end{aligned}$$

при

$$\mu \rightarrow \infty, \quad \dot{a} \rightarrow 0.$$

Смысл введения переменной x заключается в том, что, фиксируя x , мы тем самым фиксируем значение параметра

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right) = a(x),$$

независимо от величины μ , характеризующей скорость его изменения.¹

Пусть некоторая величина A является функцией a , y , \dot{y} и не зависит явно от t

$$A(x) = A\left[a(x), y(x), \frac{1}{\mu} \frac{dy}{dx}\right].$$

Мы назовем величину A адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения, если для любого заданного $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ можно найти такое M , что для всякого $\mu > M$ и x в интервале от 0 до X имеет место неравенство²

$$|A(x) - A(0)| < \varepsilon.$$

¹ Заметим, что при таком способе рассмотрения автоматически исключаются случаи изменения параметра, подобные изменению его в известном примере, когда длина маятника изменяется рывком в крайнем его положении.

² Или в более общем случае в каком-нибудь интервале от α до β .

Если M можно выбрать так, чтобы оно не зависело от X , то величину A мы назовем «стационарным» (или «равномерным») адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения.

Если M нельзя выбрать независимым от x , то величину A назовем «временным» (или «неравномерным») адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения. В обоих случаях мы требуем, чтобы

$$|A(x) - A(0)| \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow \infty$, т. е. при $\dot{a} \rightarrow 0$, но в случае стационарности мы требуем, чтобы это выполнялось равномерно относительно x от $x=0$ до $x=\infty$.

Для данной $L[y, \dot{y}, a]$ может существовать функция.

$$I[y, \dot{y}, a],$$

которая является «временным» адиабатическим инвариантом для всех $a(x)$, т. е. для всевозможных реопараметрических движений, отвечающих данной зависимости функции Лагранжа от a, y, \dot{y} .

Кнезер (Н. Kneser) доказал,¹ что $\int p dq$ (для случая системы с одной степенью свободы) является адиабатически инвариантом именно в смысле временной адиабатической инвариантности.

§ 2.

Рассмотрим движение, определяемое функцией

$$L = \frac{1}{2} l^2 \dot{y}^2 - \frac{1}{2} g l y^2, \dots \dots \dots (1)$$

где

$$l = l\left(\frac{t}{\mu}\right) \quad \text{и} \quad g = g\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Физически это движение можно интерпретировать как случай малых колебаний маятника переменной длины l в переменном поле силы тяжести g .

Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x,$$

находим уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dx} \left(l^2 \frac{dy}{dx} \right) + \mu^2 g l y = 0. \dots \dots \dots (2)$$

¹ Н. Кнезер, Math. Ann. 91, 155, 1924.