УДК 624.04:004 DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1

Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой

М.Н. Кирсанов
Национальный исследовательский университет «МЭИ» (НИУ «МЭИ»),
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

АННОТАЦИЯ
Введение. Предложена схема плоской симметричной статически определимой балочной фермы с прямолинейным нижним поясом, стойками, разнонаправленными раскосами и полигональным очертанием верхнего пояса. Пояса фермы прямолинейные, шарниры идеальные. Ферма относится к классу регулярных ферм, имеющих периодические ячейки. Опорные стержни приняты недеформируемыми. Ферма равномерно нагружена по узлам нижнего пояса.
Материалы и методы. Поставлена задача вывода зависимости прогиба фермы от числа панелей в пролете. Прогиб получается по формуле Максвелла – Мора в предположении, что все стержни имеют одинаковую жесткость. Усилия в стержнях конструкции от действующей равномерной нагрузки и от единичной вертикальной в середине пролета определяются методом вырезания узлов. Матрица системы линейных уравнений равновесия узлов составляется из косинусов усилий с осями координат. Для составления системы уравнений и ее решения используется программа символьной математики Maple. Для получения общей формулы решается ряд задач ферм с числом панелей от 2 до 29. Последовательности коэффициентов формулы прогиба имеют общие члены, для которых также методами системы Maple с использованием специализированных операторов составляются однородные рекуррентные уравнения.
Результаты. Решения рекуррентных уравнений имеют форму полиномов с коэффициентами, зависящими от четности числа панелей, и содержат тригонометрические функции. Построены и проанализированы графики полученных решений. Отмечаются характерные для подобных ферм скачки прогиба и их немонотонный характер. Показано, что при фиксированной, не зависящей от числа панелей, длине пролета и суммарной нагрузке относительный прогиб с увеличением числа панелей сначала падает, затем меняется мало.
Выводы. Методами системы Maple получено асимптотическое свойство решения: найдена наклонная асимптота. Угол наклона вычислен с использованием аналитических возможностей Maple. Выведена простая формула для горизонтального смещения подвижной опоры от действия нагрузки. Зависимость оказывается монотонной. Высота фермы входит в знаменатель формулы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, точное решение, прогиб, индукция, Maple

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: http://nso-journal.ru. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1

Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice

Mikhail N. Kirsanov
National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI),
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation

ABSTRACT
Introduction. A scheme is proposed for a planar symmetric statically determinate beam truss with a rectilinear lower belt, struts, multidirectional braces and a polygonal outline of the upper belt. The belts of the truss are rectilinear, the hinges are ideal. The truss belongs to the class of regular trusses having periodic cells. The supporting rods are not deformable. The truss is evenly loaded around the nodes of the lower belt.
Materials and methods. The task is to deduce the dependence of the deflection of the truss on the number of panels in the span. The deflection is obtained from the Maxwell-Mora formula under the assumption that all the rods have the same rigidity. Forces in the structural rods from the effective uniform load and from the unit vertical in the middle of the span are determined by the method of cutting the nodes. The matrix of the system of linear equations of node equilibrium is made up of the cosines of the forces with the coordinate axes. To compile a system of equations and solve it, the program of symbolic mathematics Maple is used. To obtain the general formula, a number of problems of trusses with a number of panels from 2 to 29 are solved. Sequences of the coefficients of the deflection formula have common terms for which homogeneous recurrence equations are also compiled using the methods of the Maple system using specialized operators.
Results. The solutions of recurrence equations have the form of polynomials with coefficients that depend on the parity of the number of panels and contain trigonometric functions. The graphs of the solutions obtained are constructed and analysed. Sharp changes of deflection characteristic for such truss and their non-monotonic character are noted. It is shown that for a fixed, independent on the number of panels, length of the span and the total load, the relative deflection with increasing number of panels first decreases, then varies little.
Conclusions. The asymptotic property of the solution is obtained by the methods of the Maple system: an inclined asymptote is found. The slope is calculated using the analytical capabilities of Maple. A simple formula is derived for the horizontal displacement of the mobile support from the action of the load. The dependence is monotonic. The height of the truss is included in the denominator of the formula.

KEYWORDS: truss, exact solution, deflection, induction, Maple

FOR CITATION: Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2019; 9(1):1. URL: http://nso-journal.ru. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] Р.Дж. Хатчинсон и Н.Э. Флек объявили «охоту» на схемы статически определимых регулярных ферм. Если не ограничиваться только простыми схемами балочных ферм с треугольной или прямоугольной решеткой, то цель поиска таких схем очевидна и имеет практический смысл. Для разных целей в строительстве и машиностроении требуются фермы с различными свойствами. Как правило, основой всех используемых на практике ферм являются статически определимые конструкции, к которым иногда добавляются какие-либо дополнительные элементы, делающие схему статически неопределимой, или идеальные шарниры заменяются жесткими соединениями. При этом свойство базовой статически определимой схемы является определяющим в статическом и динамическом расчетах.

С тех пор, как была объявлена «охота», различными авторами были предложены различные схемы как плоских [3–6], так и пространственных [7, 8] ферм, для которых методом индукции найдены решения задачи о прогибе в зависимости от числа панелей. Хотя эти решения были найдены с использованием системы компьютерной математики Maple, очевидно вполне возможно использовать и другие компьютерные системы. Главное требование для этих программ — наличие операторов для нахождения общих членов последовательностей. Такие последовательности возникают при обобщении методом индукции ряда частных решений для ферм с разным числом панелей (или ячеек периодичности) на произвольное число панелей.

Аналитические зависимости усилий и деформаций ферм имеют не только теоретическое, но и практическое значение как для оценки проектов конструкций, так и при исследовании характеристик существующих ферм. Примерами аналитических расчетов могут быть работы [9–16], где даны достаточно простые формулы для расчета различных арочных ферм, и [17–21] — решетчатых.

СХЕМА ФЕРМЫ. МЕТОД РАСЧЕТА

Предлагается схема симметричной конструкции (рис. 1). Число панелей в половине пролета равно n. Ферма содержит $s = 6n + 1$ шарнирных узлов и $m = 12n + 2$ — стержней. В число стержней включены и три стержня, моделирующие опоры. Нагрузка приложена равномерно по узлам нижнего пояса. В ферме $4n - 2$ стержня длиной a в верхнем и нижнем поясе, $2n - 1$ стоек высотой b, $4n$ раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $2n$ раскосов длиной $d = \sqrt{a^2 + h^2}$.

При вычислении прогиба используется интеграл Мора. Для этого потребуются символьные выражения для усилий в стержнях, которые получим по программе [3]. Основой программы является метод вырезания узлов. Интеграл Мора в данном случае имеет вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF).$$

Введены стандартные обозначения: S_i — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки; N_i — усилия в стержнях от действия единичной (безразмерной) вертикальной силы в середине пролета; l_i — длины стержней; EF — жесткость стерж-

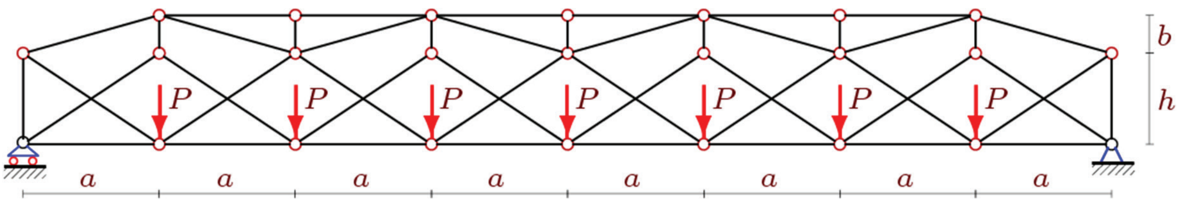

Рис. 1. Ферма, $n = 4$

ɳqdpყeʏ bɆ dəpƐbУзə d ɛɑɔqɔʏ ɟqdpУqʎè

ней. Усилия трех жестких опорных стержней в сумму не входят.

Пользуясь алгоритмом [3], предназначенным для системы компьютерной математики, например, Maple, составляем матрицу косинусов направляющих углов усилий. В программу вводятся координаты узлов. Приведем фрагмент кода на языке Maple:

```
> for i to 2*n+1
  do
   x[i]:=a*(i-1);  y[i]:=0:
   x[i+2*n+1]:=x[i];y[i+2*n+1]:=h:
  od:
> for i to 2*n-1
  do
>     x[i+4*n+2]:=a*i; y[i+4*n+2]:=b+h;
  od:
```

Схема соединений стержней и шарниров решетки фермы задается векторами $\overline{R}_i$, $i=1,\ \dots,\ m$, соответствующими стержням. Компоненты этих векторов определяют номера шарниров по их концам.

В системе Maple эти векторы, соответствующие нижнему поясу и раскосам длиной c, имеют вид:

```
> for k to 2*n
  do
   R[k]:=[k,k+1];
>   R[k+2*n+2]:=[k,k+2*n+2];
>   R[k+4*n+2]:=[k+1,k+2*n+1];
>  od:
```

Раскосы длиной d в верхнем ряду решетки:

```
> for k to n
  do
>     R[k+6*n+2]:=[2*k+2*n,2*k+4*n+1];
>     R[k+7*n+2]:=[2*k+2*n+2,2*k+4*n+1];
>   od:
```

Верхний пояс фермы:

```
> for k to 2*n-2
   do
    R[k+8*n+2]:=[k+4*n+2,k+4*n+3];
   od:
```

Стойки:

```
> for k to 2*n-1
  do
   R[k+10*n]:=[k+2*n+2,k+4*n+2];
  od:
```

Два боковых стержня в верхнем поясе:

```
> R[2*n+1]:=[1,2*n+2]:
R[2*n+2]:=[2*n+1,4*n+2]:
```

По данным координат и структуры решетки формируется матрица системы линейных уравнений:

$$G\overline{S}=\overline{B}.$$

В результате решения полученной системы в символьной форме получаем усилия в стержнях фермы. Обозначено: $\overline{S}$ — вектор усилий в стержнях фермы (включая опорные); $\overline{B}$ — вектор нагрузок. Значения горизонтальных нагрузок, приложенные к узлу i, записываются в нечетные элементы B_{2i-1}, вертикальные — в четные $B_{2i}=P$, $i=2,\ \dots,\ 2n$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Последовательный расчет ферм с увеличивающимся от 2 до 28 числом панелей $h=b$ дает результат вида:

$$\Delta = P\frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{2EFnh^2}. \qquad (1)$$

Для определения коэффициентов A_n, C_n и H_n оператор rgf_findrecur системы Maple дает рекуррентные уравнения для членов соответствующих последовательностей. Для коэффициентов 4, 43, 176, 613, 1500, 3391, 6528, 12 065, ..., 4 265 045 при a^3 имеем уравнение:

$$\begin{aligned} A_n &= 2A_{n-1}+A_{n-2}-4A_{n-3}+3A_{n-4}-\\ &-2A_{n-4}-2A_{n-5}-3A_{n-6}+\\ &+8A_{n-7}-3A_{n-8}-2A_{n-9}+3A_{n-10}-\\ &-4A_{n-11}+A_{n-12}+2A_{n-13}-A_{n-14}. \end{aligned}$$

Для решения этого уравнения привлекаем оператора rsolve:

$$\begin{aligned} A_n &= (5n^5-(3\cos 2\varphi+11)n^3+\\ &+(27-24\cos\varphi-3\cos 2\varphi)n/2+12\sin\varphi)/24, \end{aligned}$$

где $\varphi=\pi n/2$. Выражения для других коэффициентов выводятся аналогично:

$$\begin{aligned} H_n &= 2(1-\cos\varphi)n^2+\\ &+(2\sin\varphi-2\cos\varphi+\cos 2\varphi+1)n+2\sin\varphi,\\ C_n &= 2n^3+(3\cos 2\varphi-8\cos\varphi+5)n+8\sin\varphi)/4. \end{aligned}$$

Не менее важной характеристикой деформативности балочной фермы является горизонтальное смещение подвижной опоры от действия нагрузки. Если, пользуясь методом индукции, рассчитать эту величину для рассматриваемой фермы, то получится следующая простая зависимость

$$\delta = Pa^2n(n^2-1)/(3hEF).$$

В отличие от решения (1) здесь зависимость от числа панелей — монотонная.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Если проследить зависимость прогиба от числа панелей при фиксированной длине пролета $L=2an=80$ м и фиксированной суммарной нагрузке $P_s=(2n-1)P$, то можно заметить немонотонность изменения относительного безразмерного прогиба $\Delta'=\Delta EF/(P_sL)$ от числа панелей и выход кривых на некоторую постоянную величину (рис. 2). В действительности горизонтальной асимптоты здесь нет. Есть наклонная асимптота, которую легко вычислить, пользуясь аналитическими возможностями Maple, $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta'/n=h/(8L)$.