МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Полугруппы линейных ограниченных операторов

Учебное пособие для вузов

пособие для студентов, обучающихся по направлению 01.03.04 Прикладная математика

Воронеж

2016

1. Задача Коши.

Рассмотрим в банаховом пространстве E дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (1.1)$$

С линейным оператором A имеющим всюду плотную в E область определения $D\ \ A$.

Определение 1.1. Решение уравнения на отрезке $0,T$ называется функция $x\ \ t$ удовлетворяющее условиям

1) значения $x\ \ t$ принадлежат $D\ \ A\ \ \forall t \in\ 0,T$

2) в $\forall t \in\ 0,T$ существует $x'\ \ t$

3) уравнение $x'\ \ t\ = Ax\ \ t$ удовлетворяет при всех $t \in\ 0,T$

Очевидно решение $x\ \ t$ является непрерывным на отрезке $0,T$

Задача Коши на $0,T$ называется задачей нахождения решения уравнения(1.1)на отрезке $0,T$ удовлетворяющего начальным условиям $x\ \ 0\ = x_0 \in D\ \ A$

Определение 1.2. Задача Коши поставлена корректно на $0,T$ если:

1) $\forall x_0 \in D\ \ A$ существует её единственное решение

2) это решение зависит непрерывно от начальных данных, в том смысле что, на $x_n \to 0\quad x_n\ \ 0\ \in D\ \ A$ для соответствующих решений $x_n\ \ t$ следует $x_n\ \ t\ \to 0\quad \forall t \in\ 0,T$

Замечание. Из корректности задачи Коши на $0,T$ следует её корректность на $0,T_1\quad T_1 > 0$ т.е. корректность на всей полуоси $0,+\infty$.

Введем в рассмотрение оператор $U\ \ t$,ставящий в соответствие элементу $x_0 \in D\ \ A$ значение решения $x\ \ t$ задачи Коши $x\ \ 0\ = x_0$ в момент

$$x\ \ t\ \ - x\ \ 0\ \ = \int_{\varepsilon}^{t} x'\ \ t\ \ dt \Rightarrow x'\ \ 0\ \ = \lim_{t\to+0} x'\ \ t$$

Из замкнутого $A \Rightarrow \lim t \to +0$

$$x'\ \ t\ \ = Ax\ \ t$$
$$x'\ \ 0\ \ = A\ \ 0$$

Лемма доказана.

2. Преобразование Лапласа, представление решений.

Исследуем поведение полугруппы $U(t)$ при $t \to \infty$. Для этого введем в рассмотрение функцию $f(t) = \ln\|U(t)\|\ (0 < t < \infty)$. Из полугруппового свойства $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)\ (0 < t_1, t_2 < \infty)$ следует неравенство

$$\|U(t_1 + t_2)\| \le \|U(t_1)\| \cdot \|U(t_2)\|$$

и полуаддитивность функции $f(t)$

$$f(t_1 + t_2) \le f(t_1) + f(t_2).$$

Оказывается, что для всякой полуаддитивной на $(0,\infty)$ функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \inf \frac{f(t)}{t} = \omega < \infty.$$

Действительно, пусть $\omega = \inf \dfrac{f(t)}{t}$ конечно. Выберем числа a так, чтобы $f(a) < (\omega + \varepsilon)a$. Тогда при $(n+1)a \le t \le (n+2)a$ имеем

$$\omega \le \frac{f(t)}{t} \le \frac{nf(a) + f(t - na)}{t} \le \frac{na}{t}(\omega + \varepsilon) + \frac{f(t - na)}{t}.$$

Так как $a \le t - na \le 2a$, то $|f(t - na)| \le M_a$ (полуаддитивная функция, ограниченная на каждом отрезке, содержащемся в $(0,\infty)$), и, следовательно, правая часть неравенства стремится к $\omega + \varepsilon$ при $t \to \infty$. Таким образом, при достаточно больших t значения функции $\frac{f(t)}{t}$ сколь угодно мало отличаются от ω. Аналогично рассматривается возможный случай, когда $\omega = -\infty$.

Итак,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{t} = \omega < \infty \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Если задача Коши для уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax$ корректна, то каждое его обобщенное решение растет на бесконечности не быстрее экспоненты; экспоненциальные типа всех решений ограничены сверху.

Число ω из (2.1) называют типом полугруппы $U(t)$ и типом задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(0) = x_0 \in D(A).$$

Из теоремы (2.1), в частности, следует, что для корректности задачи Коши необходимо, чтобы оператор A не имел собственных чисел в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Действительно, если z- собственный вектор оператора A: $Az = \lambda z$, то ему отвечает решение $U(t)z = e^{\lambda t} z$, экспоненциальный тип которого равен $\mathrm{Re}\lambda$ и, значит, $\mathrm{Re}\lambda < \omega$. При $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ оператор $A - \lambda I$ имеет на своей области значений $\Re(A - \lambda I)$ обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.

Ограниченность экспоненциальных типов всех решений позволяет к их исследованию применять преобразование Лапласа. При $x_0 \in D(A)$ и $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ определен интеграл

$$\Im(\lambda) x_0 = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) x_0 dt\,. \tag{2.2}$$

Функция $U(t)x_0$ непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, поэтому интегрируя по частям, получим

$$\Im(\lambda) x_0 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_0^N e^{-\lambda t} U(t) x_0 dt = -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} U(t) x_0 \Big|_\varepsilon^N + \frac{1}{\lambda} \int_\varepsilon^N e^{-\lambda t} AU(t) x_0 dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} x_0 - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^{N} e^{-\lambda t} AU(t) x_0 dt.$$

Предел слева существует, поэтому последний интеграл существует как несобственный и

$$\Im(\lambda) x_0 = -\frac{1}{\lambda} x_0 - \frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} AU(t) x_0 dt.$$

Пусть теперь оператор A допускает замыкание $\bar{A}$. Тогда за знак интеграла можно вынести оператор $\bar{A}$ и прийти к равенству

$$(\bar{A} - \lambda I)\Im(\lambda) x_0 = x_0 \qquad (x_0 \in D(A)) \qquad (2.3)$$

Наконец, для замкнутого оператора A получаем

$$(A - \lambda I)\Im(\lambda) x_0 = x_0 \qquad (x_0 \in D(A)) \qquad (1.4)$$

Отсюда следует, во-первых, что область определения $D(A)$ содержится в области значений оператора $A - \lambda I$ при любом λ с $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ и, во-вторых, что на $D(A)$

$$(A - \lambda I)^{-1} x_0 = -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} U(t) x_0 dt \qquad (2.5)$$

Формула (2.2) принимает тогда вид

$$(A - \lambda I)^{-1} x_0 = -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} U(t) x_0 dt$$

Сделаем еще предположение, что оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку λ_0, и обозначим через $R(\lambda_0)$ – резольвенту оператора A. Если x - любой элемент из E, то $R(\lambda_0)\ x \in D(A) \subset \Re(A - \lambda I)$ при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Обозначая

$$z = (A - \lambda I)^{-1} R(\lambda_0) x,$$

получаем

$$x=(A-\lambda_0 I)(A-\lambda I)z=(A-\lambda I)(A-\lambda_0 I)z.$$

Отсюда следует, что $x\in\Re(A-\lambda I)$, т.е., что область значений оператора $A-\lambda I$ совпадает со всем пространством.

Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ замкнут и определен во всем пространстве, следовательно, он ограничен. Итак, оператор A имеет резольвенту $R(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$ при всех λ в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>\omega$.

Если в (2.5) подставим $x_0=R(\lambda_0)x$, то, используя тождество Гильберта, получим представление для резольвенты $R(\lambda)$ на любом $x\in E$:

$$R(\lambda)x=R(\lambda_0)x-(\lambda-\lambda_0)\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)R(\lambda_0)xdt. \tag{2.6}$$

Из того, что оператор A коммутирует с полугруппой, следует, что резольвента $R(\lambda)$ также коммутирует с $U(t)$. Если элемент x таков, что функция $U(t)x$ суммируема на отрезке $0,T$, то оператор $R(\lambda_0)$ можно вынести за знак интеграла, и мы придем к формуле

$$R(\lambda)x=-\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt. \tag{2.7}$$

Наши результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 2.2. Пусть задача Коши для уравнения $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ корректна и имеет тип ω. Если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то при $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ он имеет резольвенту $R(\lambda)$, которая выражается через полугруппу $U(t)$ по формулам (2.6) и (2.7).

Если обобщенное решение $U(t)x$ локально суммируемо на $0,\infty$, то для него справедливо представление

$$U(t)x=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)x\frac{d\lambda}{\lambda}\right)\quad(\sigma>\omega, t>0). \tag{2.8}$$

Если на каком-либо отрезке функция $U(t)x$ абсолютно непрерывна, то внутри этого отрезка

$$U(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda) x d\lambda \tag{2.9}$$

В частности, последняя формула имеет место для решения задачи Коши при всех $t > 0)$.

Формулы (2.8) и (2.9) следуют из свойств обращения преобразования Лапласа, а последнее утверждение - из того, что решение задачи Коши имеет непрерывную производную при $t > 0)$.

Формула (2.6) для резольвенты показывает, что норма резольвенты не может быстро расти при $\lambda \to \infty$. Действительно, функция $U(t)R(\lambda_0)x$ непрерывна при любом $x \in E$, поэтому в силу теоремы Банаха - Штейнгауза операторы $U(t)R(\lambda_0)$ равномерно ограничены на любом конечном промежутке $0,T$. Учитывая (2.1), можно утверждать, что

$$\|U(t)R(\lambda_0)\| \le M_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)t}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Зафиксировав такое ε и обозначив $\omega_1 = \omega + \varepsilon$, для нормы резольвенты получим оценку

$$\|R(\lambda)\| \le M\left(1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\mathrm{Re}(\lambda - \omega_1)}\right) \qquad (\mathrm{Re}\lambda > \omega_1),$$

где $M = \max \|R(\lambda_0)\|, M_\varepsilon$. Из этой оценки следует, что норма резольвенты равномерно ограничена на всякой полупрямой $\mathrm{Im}\lambda = c$, $\mathrm{Re}\lambda \ge \omega_2 \ge \omega_1$. Во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \ge \omega_2$ справедлива оценка

$$\|R(\lambda)\| \le M_1(1 + |\lambda|).$$

Таким образом, требование корректности задачи Коши налагает сильные ограничения на резольвенту оператора A.

До сих пор речь шла о норме резольвенты. Рассмотрим поведение резольвенты на каждом элементе. Пусть $x \in D(A)$.

Тогда

$$R(\lambda)x = -\frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda)Ax}{\lambda}.$$