

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

УРАВНЕНИЕ ЗАМКНУТОСТИ ДЛЯ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Н.А. БАЗАРЕНКО, И.М. ПЕШХОЕВ

(Донской государственный технический университет)

Получено уравнение замкнутости для биортогональной системы функций. Определены свойства замкнутых систем функций, позволяющие решать контактные задачи теории упругости для тел конечных размеров – прямоугольника, круглой плиты, цилиндров конечной длины и т.д.

Ключевые слова: уравнение замкнутости, однородные решения.

Введение. При решении в цилиндрической системе координат r, φ, z осесимметричной задачи теории упругости для круглой плиты находятся так называемые однородные решения [1-5], составляющие свободным от напряжений торец плиты $r=1$ и соответствующие бигармоническим функциям $\Phi_k(r, z)$, $k=0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned}\chi_0^{-1}\Phi_0 &= c_0[vzr^2 + v_2z^3/3] + d_0(r^2/2 - z^2), \quad \varphi_0(z) = 2c_0z + 2d_0, \\ \chi_n^{-1}\Phi_n &= \gamma_n^{-1}[e_nJ_0(\gamma_nr) + rJ_1J_1(\gamma_nr)]\varphi_n(z), \quad \varphi_n(z) = d_nch\gamma_nz + c_nsh\gamma_nz, \\ \sigma_r &= \sum_{n=0}' \bar{\sigma}_r^n(r)\varphi_n'(z), \quad \sum_{k=0}' \bar{T}_k(r)\varphi_k(z) = \bar{T}(r, z), \quad \sum_{k=0}' \bar{P}_k(r)\varphi_k'(z) = \bar{P}(r, z),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\bar{T}_k(r) = i\bar{u}_z^k(r) + \bar{j}\bar{\tau}_{rz}^k(r)$, $\bar{P}_k(r) = i\bar{\sigma}_z^k(r) - \bar{j}\bar{u}_r^k(r)$ – собственные векторные функции, $\bar{T} = i\bar{u}_z(r, z) + \bar{j}\bar{\tau}_{rz}(r, z)$, $\bar{P} = i\bar{\sigma}_z(r, z) - \bar{j}\bar{u}_r(r, z)$,

$$\bar{u}_r \equiv 2Gu_r = \sum_{k=0}' u_r^k(r)\varphi_k'(z), \quad \bar{u}_z \equiv 2Gu_z = \sum_{k=0}' u_z^k(r)\varphi_k(z), \quad e_n = J_0 + v_0\gamma_n^{-1}J_1,$$

$$\sigma_z^0(r) = v_1\chi_0, \quad u_z^0(r) = \chi_0, \quad \tau_{rz}^0(r) = 0, \quad u_r^0(r) = -vr\chi_0, \quad v_0 = 2 - 2v, \quad v_1 = 1 + v,$$

$$\sigma_z^n(r) = \gamma_n(J_2J_0(\gamma_nr) - rJ_1J_1(\gamma_nr))\chi_n, \quad u_z^n(r) = (\sigma_z^n(r) - 2vJ_1J_0(\gamma_nr))\chi_n,$$

$$\tau_{rz}^n(r) = \gamma_n^2(J_0J_1(\gamma_nr) - rJ_1J_0(\gamma_nr))\chi_n, \quad u_r^n(r) = (e_nJ_1(\gamma_nr) - rJ_1J_0(\gamma_nr))\chi_n,$$

G – модуль сдвига; v – коэффициент Пуассона, $\chi_0 = \sqrt{2/v_1}$, $v_2 = 1 - 2v$; $J_v(\gamma_nr)$, $J_v \equiv J_v(\gamma_n)$ – функции Бесселя, γ_k – корни уравнения [5]:

$$v_0J_1^2 - \gamma_k^2(J_1^2 + J_0^2) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma_k \geq 0; \quad k=0, 1, \dots,$$

χ_0 и $\chi_n = (v_0^2J_1^3J_2/\gamma_n - v_0J_1^4)^{-1/2}$ ($n=1, 2, \dots$) – нормирующие множители.

Здесь и далее штрих у знака суммы означает укороченную запись

$$\sum_{k=0}' G_k(\gamma_k, r, z) \equiv G_0 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1} G_n \right) \quad (\gamma_0 = 0, \operatorname{Re} \gamma_n, \operatorname{Im} \gamma_n > 0, n=1, 2, \dots).$$

Векторные функции $\bar{T}_n(r), \bar{P}_m(r)$, соответствующие собственным значениям γ_n, γ_m ($m, n=0, 1, \dots$), а также другие функции

$$\bar{U}_n^\circ = \int_1^r \bar{T}_n(t)dt, \quad \bar{U}_m = -\left(r\bar{P}_m(r)\right)', \quad \bar{V}_n^\circ = \int_1^r \bar{P}_n(t)dt, \quad \bar{V}_m = -\left(r\bar{T}_m(r)\right)' \quad (2)$$

образуют биортогональные нормированные системы

$$\int_0^1 \bar{T}_n(r) \cdot \bar{P}_m(r) r dr = \int_0^1 \bar{U}_n(r) \cdot \bar{U}_m^\circ(r) dr = \int_0^1 \bar{V}_n(r) \cdot \bar{V}_m^\circ(r) dr = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3)$$