Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого

Р. Р. Яфаева, Ю. И. Богатырева

МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Учебно-методическое пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением
по направлениям педагогического образования
Министерства образования и науки РФ в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 050700 «Педагогика»*

В 2 частях

Часть 2: ПРАКТИКУМ

Тула
Издательство ТГПУ им. Л.Н. Толстого
2010

ББК 22.1я73+32.81я73
Я89

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Желтков*
(Тульский государственный университет);
кандидат педагогических наук, доцент *О. В. Чукаев*
(Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого)

Яфаева, Р. Р.
Я89 Математика и информатика: Учеб.-метод. пособие: В 2 ч. Ч. 2: Практикум / Р. Р. Яфаева, Ю. И. Богатырева.– Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2010.– 111 с.

В пособии представлены основные положения дисциплины «Математика и информатика», адаптированные для студентов направления подготовки «Педагогика». Математика представлена следующими разделами: аксиоматический метод построения математических теорий, комбинаторика, теория множеств, понятия и свойства вероятностей, элементы математической статистики. Информатика представлена разделами: понятие, свойства и измерение информации; алгоритмы и языки программирования; понятие и компоненты программного и аппаратного обеспечения современной компьютерной техники.

Практические задания направлены на формирование умений использовать современные информационные технологии и стандартное программное обеспечение в профессиональной деятельности педагога. Представленные примеры решения задач позволяют использовать пособие для организации самостоятельной работы студентов.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 050700 «Педагогика».

ББК 22.1я73+32.81я73

II. Практикум

Системы счисления

***Основные умения*:** осуществлять действия с числами в различных системах счисления.

***Рекомендуемая литература*:** [13, 15, 22].

Системы счисления (**нумерация**) – совокупность способов обозначения натуральных чисел.

На ранних ступенях развития общества люди почти не умели считать. Они различали совокупности двух и трех предметов; всякая совокупность, содержавшая бóльшее число предметов, объединялась в понятии «много». Первоначально натуральные числа изображались с помощью некоторого количества черточек или палочек, затем для их изображения стали использовать буквы или специальные знаки. В древнем Новгороде использовалась славянская система, где применялись буквы славянского алфавита; при изображении чисел над ними ставился знак ~ (титло).

Древние римляне пользовались нумерацией, сохраняющейся до настоящего времени под именем «римской нумерации», в которой числа изображаются буквами латинского алфавита. Сейчас ею пользуются для обозначения юбилейных дат, нумерации некоторых страниц книги (например, страниц предисловия), глав в книгах, строф в стихотворениях. Выполнение арифметических действий над многозначными числами в этой записи очень трудно. Тем не менее, римская нумерация преобладала в Италии до XIII в., а в других странах Западной Европы – до XVI в.

Этим системам свойственны два недостатка, которые привели к их вытеснению другими: необходимость большого числа различных знаков, особенно для изображения больших чисел, и, что еще важнее, неудобство выполнения арифметических операций.

Более удобной и общепринятой и наиболее распространенной является десятичная система счисления, которая была изобретена в Индии, заимствована там арабами и затем через некоторое время пришла в Европу. Существовали системы счисления и с другими основаниями.

Широкое распространение имела в древности и двенадцатеричная система, происхождение которой, вероятно, связано, как и десятичной системы, со счетом на пальцах: за единицу счета принимались фаланги (отдельные суставы) четырех пальцев одной руки, которые при счете перебирались большим пальцем той же руки. Самой молодой системой счисления по праву можно считать двоичную.

Различные группы систем счисления см. в части 1: Лекции стр. 12.

В непозиционных системах счисления от положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает. Примером непозиционной системы счисления является римская система, в которой в качестве цифр используются латинские буквы.

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции. Количество используемых цифр называется основанием системы счисления.

Значение числа X, представленного в виде $s_p \ldots s_1 s_0,\ s_{-1} \ldots s_{-q}$, равно

$$X = s_p t^p + s_{p-1} t^{p-1} + \ldots + s_1 t + s_0 + s_{-1} t^{-1} + \ldots + s_{-q} t^{-q},$$

где t – основание системы счисления, равное числу цифр, используемых для записи, s_i – цифра.

Рассмотрим системы счисления:

1) десятичную – $t=10$, $s_i \in \{0,1,\ldots,9\}$;
2) двоичную – $t=2$, $s_i \in \{0,1\}$;
3) восьмеричную – $t=8$, $s_i \in \{0,1,\ldots,7\}$;
4) шестнадцатеричную – $t=16$, $s_i \in \{0,1,\ldots,9,A,B,C,D,E,F\}$;

$(416{,}3)_8 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} = 400 + 10 + 6 + 0{,}3 = 416{,}3$

$(10100)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 = 20$

Перевод в двоичную систему счисления из 10-ичной производится отдельно целой и дробной части.

Целая часть – последовательным делением на 2. Остатки от деления, записанные в обратном порядке, образуют новую запись исходного целого числа.

Пример 1: Перевести число 92 из десятичной системы в двоичную.

92 : 2 = 46 (ост. **0**)
46 : 2 = 23 (ост. **0**)
23 : 2 = 11 (ост. **1**)
11 : 2 = 5 (ост. **1**)
5 : 2 = 2 (ост. **1**)
2 : 2 = **1** (ост. **0**)

$92_{10} = 1011100_2$

Дробная часть – последовательным умножением на 2. Цифры в разряде целых образуют искомое представление исходного числа.

Пример 2: Перевести число 0,648 из десятичной системы в двоичную:

$0,648 \times 2 = 1,296$ (**1**)

$0,296 \times 2 = 0,592$ (**0**)

$0,592 \times 2 = 1,184$ (**1**)

$0,184 \times 2 = 0,368$ (**0**)

$0,368 \times 2 = 0,736$ (**0**)

$0,736 \times 2 = 1,472$ (**1**) и т.д.

$(0,648)_{10}=(0,101001\ldots)_2$

Если основание системы счисления k можно представить в виде $k=p^n$, то каждую цифру в записи числа с основанием счисления k заменяется n цифрами системы счисления p. Рассмотрим связь между двоичной, четырехричной, восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления.

четырехричная	
Цифра	двоичный код
0	00
1	01
2	10
3	11

восьмеричная	
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

шестнадцатеричная	
цифра	двоичный код
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Пример 3: Представим число $92,648_{10}$ в 4-й, 8-й и 16-й системах счисления.

В двоичной системе число $92,648_{10} = 1011100,101001_2$. Число разбивается на группы, группы отчитываются от запятой, разделяющей целую и дробную часть, недостающие позиции заменяются нулями. В начале целой части или в конце дробной нули незначащие.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Разобьем на пары:

$1011100{,}101001_2 = \mathit{0}1\ 01\ 11\ 00{,}10\ 10\ 01 = 1130{,}221_4$

Разобьем на триады:

$1011100{,}101001_2 = \mathit{00}1\ 011\ 100{,}101\ 001 = 134{,}51_8$

Разобьем на тетроды:

$1011100{,}101001_2 = \mathit{0}101\ 1100{,}1010\ 01\mathit{00} = 5C{,}A4_{16}$

$92{,}\ 648_{10} = 1011100{,}101001_2 = 1130{,}221_4 = 134{,}51_8 = 5C{,}A4_{16}$

Можно заметить, что чем больше основание системы счисления, тем меньше необходимо цифр для записи числа.

Арифметические операции

Арифметические операции во всех позиционных системах счисления выполняются по правилам, аналогичным в десятичной системе. Для выполнения операций необходимы следующие понятия:

$A \vdots B = C \pmod D$

1) остаток от деления (D); 2) целочисленное деление (C).

Например, $8 \vdots 5 = 1 \pmod 3$; $10 \vdots 3 = 3 \pmod 1$; $8 \vdots 4 = 2 \pmod 0$.

Сложение

При сложении, числа записываются столбиком в соответствии с разрядами. Складываются цифры. Записывается цифра, равная остатку от деления суммы на основание системы счисления, а число, равное результату целочисленного деления суммы на основание системы счисления переносится в старший разряд.

При сложении чисел можно воспользоваться таблицей:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

<u>Пример 4:</u> Сложить числа 11011010_2 и 101010_2.

Решение.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & \\
+ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0_2
\end{array}
$$

Проверка: $11011010_2 = 218$; $101010_2 = 42$; $100000100_2 = 260$; $218 + 42 = 260$

Выполнить действия: $100011_2 + 10111_2 = 111010_2$; $10111_2 + 101_2 = 11100_2$; $11011010_2 + 101010_2 = 100000100_2$; $101{,}01_2 + 11{,}11_2 = 1001_2$; $475_8 + 514_8 = 1211_8$; $72_8 + 12_8 = 104_8$; $16{,}24_8 + 53{,}45_8 = 71{,}71_8$.

ђqdqÿеҮ bĘ dеqĘbҮзе d ɛɑɑɓɔҰ ᏧqdqҮqÿè

Вычитание

Для осуществления операции вычитания можно воспользоваться таблицей сложения. Возможен заем числа равного основанию системы счисления из старших разрядов, при этом нули, стоящие между цифрой, от которой вычитают и цифрой, у которой «занимают» превращаются в максимальную цифру системы счисления.

<u>Пример 5:</u> Вычесть из числа 1110011_2 число 1110_2.

Решение.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \cdot & 1 & 2 & & \\
- & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1_2 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_2
\end{array}
$$

Проверка: $1110011_2 = 115$; $1110_2 = 14$; $1100101_2 = 101$; $115-14=101$

Выполнить действия: 1010111_2 -1101_2 $=1001010_2$; $514_8 - 475_8 = 17_8$; $72_8 - 16_8 = 54_8$; $53{,}15_8 - 16{,}26_8 = 34{,}67_8$

Умножение

При умножении числа записываются столбиком, перемножается каждая цифра множителя на каждую цифру множимого числа, записывается остаток от деления результата умножения на основание системы счисления, а целая часть складывается с результатом умножения следующей цифры, затем полученный столбец чисел складывается. Для умножения чисел можно воспользоваться таблицей:

Двоичная система:

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

<u>Пример 6:</u> Найти произведение чисел 11011_2 и 110_2.

Решение.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \times & 1 & 1 & 0 & 1 & 1_2 & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0_2 \\
\cline{3-8}
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_2
\end{array}
$$

Проверка: $11011_2 = 27$; $110_2 = 6$; $10100010_2 = 162$; $27 \times 6 = 162$.

Выполнить действия: $(11011)_2 \times (110)_2 = (10100010)_2$

$(33)_8 \times (6)_8 = (242)_8$ $(1B)_{16} \times (6)_{16} = (A2)_{16}$

Деление

Деление осуществляется по тому же алгоритму, что и в десятичной системе – «деление уголком», также можно воспользоваться таблицей умножения. От делимого выделяется часть большая делителя, но не больше чем в t раз (t – основание системы счисления). В результате подбирается цифра, произведение делителя на которую даст число, меньшее выделенного, произведение записывается под делимым, сносится следующая цифра, если получившееся значение числа превосходит делитель, пишется – подбирается новая цифра, если нет – в частном пишется 0 и сносится следующая цифра и т.д., до получения результата или достижения требуемой точности.

При проведении арифметических операций над числами, выраженными в различных системах счисления, необходимо предварительно перевести их в одну и ту же систему.

<u>Пример 7</u>: Найти частное чисел 1000001_2 и 101_2.

Решение.

```
1  0  0  0’  0  0  1₂ | 1  0  1₂
  1  0  1              -----------
  -------               1  1  0   1₂
     1  1  0
     1  0  1
     -------
           1  0  1
           1  0  1
           -------
                 0
```

Проверка: $1000001_2 = 65$; $101_2 = 5$; $1101_2 = 13$; 65: 5= 13.

Выполнить действия:

$(10100010)_2 : (110)_2 = (11011)_2$ $(242)_8 : (6)_8 = (33)_8$ $(A2)_{16} : (6)_{16} = (1B)_{16}$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Перевести в десятичную систему:

100101_2 = ____________ $_{10}$

$131,5_8$ = ______________ $_{10}$

$A0C4_{16}$ = ______________ $_{10}$

$2031,02_4$ = ____________ $_{10}$

Задание 2. Перевести в различные системы счисления из десятичной:

933_{10} = __________________ $_{16}$

$45,83_{10}$ = ________________ $_8$

688_{10} = ______________________ $_8$

$27,72_{10}$ = _____________________ $_2$

$295_{10} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{16}$
$83{,}03_{10} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{4}$

Задание 3. Выполнить действия, проверить путем перевода в десятичную систему счисления:

$10011_2 - 110_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$10011_2 + 10111_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$11101_2 \times 101_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$111000_2 / 1110_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$1000111_2 - 10110_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$10011_2 \times 10111_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$1000011_2 + 1001_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$11001_2 / 101_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$

Задание 4. Записать в различных системах счисления, используя таблицы:

$1001001{,}110_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_4$
$10011{,}10111_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{16}$
$11101{,}101_2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_8$
$543{,}13_8 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$15A{,}C3_{16} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$416{,}113_8 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$232{,}001_4 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$
$7C1{,}59_{16} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}_2$

Вопросы для самоконтроля

1. В чем отличие позиционной системы счисления от непозиционной?
2. Приведите примеры непозиционных систем счисления.
3. Составьте алгоритм выполнения сложения в двоичной системе счисления.
4. Составьте алгоритм выполнения вычитания в двоичной системе счисления.
5. Составьте алгоритм выполнения умножения в двоичной системе счисления.
6. Составьте алгоритм выполнения деления в двоичной системе счисления.

Индивидуальные задания

1. Перевести в десятичную систему: 100101_2 $1011{,}11_2$ $0{,}1101_2$

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления из десятичной с точностью до 8 знаков после запятой для бесконечных дробей: 33_{10} $45{,}83_{10}$ $0{,}125_{10}$

Выполнить действия, проверить путем перевода в десятичную:

10111001_2-100011_2 ; 10011_2+10111_2;

$10011_2 \times 1011_2$; $10000111000_2/1111_2$.

2. Перевести в десятичную систему: 110111_2 $1001{,}01_2$ $0{,}101_2$

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления из десятичной с точностью до 8 знаков после запятой для бесконечных дробей: 68_{10} $0{,}75_{10}$ $27{,}72_{10}$

Выполнить действия, проверить путем перевода в десятичную:

1000101011_2-11101_2 ; $10011_2 \times 10111_2$;

1011011_2+10111101_2 ; $10100100000_2/10000_2$

3. Перевести в десятичную систему: 10110110_2 $1011{,}101_2$ $0{,}11101_2$

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления из десятичной с точностью до 8 знаков после запятой для бесконечных дробей: 629_{10} $0{,}25_{10}$ $19{,}39_{10}$

Выполнить действия, проверить путем перевода в десятичную:

101100001_2-1010_2 ; 11101_2+10101_2;

$101110110_2 \times 100010_2$; $10000111000_2/111100$.

4. Перевести в десятичную систему: 110100_2 $101001{,}1_2$ $0{,}1101_2$

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления из десятичной с точностью 8 знаков после запятой для бесконечных дробей: 295_{10} $0{,}625_{10}$ $83{,}03_{10}$

Выполнить действия, проверить путем перевода в десятичную:

1001100001_2-101111_2; 100101_2+10111_2;

$10110_2 \times 1011_2$; $101000_2/1000_2$

ŋqdqyeY bⱻ deqⱻbYɜe d eɔɑbɔʎ Jqdqyqè