МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Практическое руководство

Составитель И. Д. Коструб

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

СОДЕРЖАНИЕ

***Теорема* (*Коши*).** *Пусть дано уравнение* (3). *Если функция* $f(x,y)$ *и её частная производная по* y $f'_y(x,y)$ *непрерывны в некоторой области* D *плоскости* Oxy, *то в некоторой окрестности любой внутренней точки* (x_0, y_0) *этой области существует единственное решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условию* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Определение. *Начальными условиями* или *условиями Коши* называются условия, которые задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0. Записываются они в такой форме $y(x_0) = y_0$.

Определение. *Общим решением уравнения* (3) называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении C.

Определение. *Частным решением уравнения* (3) в области D называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная при определённом значении постоянной $C = C_0$.

Примеры. Рассмотрим различные уравнения при начальном условии $y(0) = 1$.

1. $y' = 0$. Его общее решение $\varphi(x) = C$. Частное решение $\varphi_{Коши}(x) = 1$, получающееся при $C = 1$.

2. $y' = 1$. Его общее решение $\varphi(x) = x + C$. Частное решение $\varphi_{Коши}(x) = x + 1$, получающееся при $C = 1$.

3. $y' = ay$. Его общее решение $\varphi(x) = Ce^{ax}$. Частное решение $\varphi_{Коши}(x) = e^{ax}$, получающееся при $C = 1$.

При написании этого раздела использовалась литература [1], [3], [4].

3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3). Пусть его решение $y = \varphi(x)$, график которого есть непрерывная интегральная кривая, причём в каждой её точке существует касательная. Из дифференциального уравнения следует, что угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой её точке равен правой части этого уравнения. Значит, уравнение первого порядка задаёт угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой как функцию двух переменных. Если каждой точке (x, y) сопоставить отрезок, направленный под углом наклона $\alpha = arctag(f(x, y))$ к оси Ox, то получим *поле направлений* данного уравнения. Это и есть геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Поле направлений позволяет проанализировать решение дифференциального уравнения и приблизительно построить интегральные кривые.

Определение. *Изоклина* – это геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и тоже направление.

Семейство изоклин дифференциального уравнения (3) определяется уравнением

$$f(x, y) = k, \tag{4}$$

где k – параметр. Придавая ему близкие числовые значения, мы получим достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых приближённо строятся интегральные кривые рассматриваемого уравнения.

Примеры. С помощью метода изоклин приближённо начертить решения уравнения: **1.** $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

Решение. Запишем уравнение семейства изоклин $y - x^2 + 2x - 2 = k$ или в более привычном виде $y = x^2 - 2x + 2 + k$. Изоклинами являются параболы с вертикальной осью симметрии. Построим их.

При $k = 0$ получаем изоклину $y = x^2 - 2x + 2$. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точке пересечения с изоклиной $k = 0$, образуют нулевой угол с осью Ox. Эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная имеет один и тот же знак, и именно на ней находятся точки экстремума.

При $k = 1$ изоклина $y = x^2 - 2x + 3$. Интегральные кривые имеют угол наклона касательных $\pi / 4$.

При $k = -1$ изоклина $y = x^2 - 2x + 1$. Интегральные кривые имеют угол наклона касательных $3\pi / 4$.

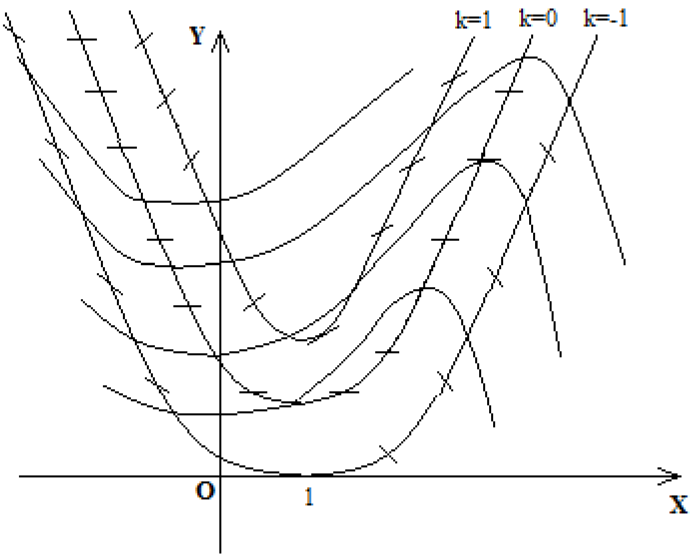

Рис. 1

Проверим, встречаются ли среди изоклин интегральные кривые. Для этого подставим уравнение семейства изоклин в наше дифференциальное уравнение. Получим $2x - 2 = x^2 - 2x + 2 + k$ или $2x - 2 = k$. Это равенство ни при каком k не превратится в тождество. Значит, среди изоклин нет интегральных кривых. Семейство интегральных кривых изображено на приводимом ниже рис. 1.

2. Используя метод изоклин, приближённо начертить решения уравнения: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$.

Решение. Выпишем уравнение семейства изоклин $\dfrac{y-x}{y+x} = k$ или $y(1-k) = x(1+k)$. Изоклинами являются прямые, проходящие через начало координат.

При $k = 0$ получаем изоклину $y = x$.

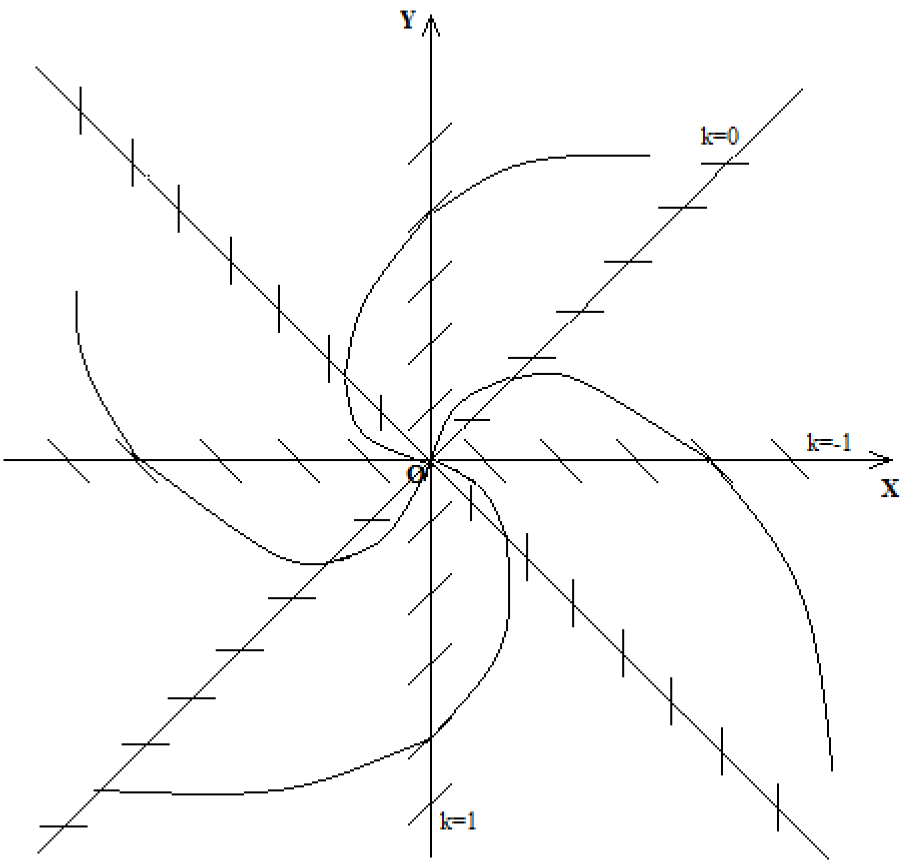

Рис. 2

При $k=1$ получаем прямую $0=x$, интегральные кривые имеют угол наклона касательных $\pi/4$.

При $k=-1$ изоклина $y=0$, интегральные кривые имеют угол наклона касательных $3\pi/4$.

Рассмотрим перевёрнутое уравнение $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y+x}{y-x}$. Уравнение семейства изоклин $\dfrac{y+x}{y-x}=k$. При $k=0$ получаем изоклину $y=-x$, и на ней интегральные кривые имеют вертикальные касательные. Все прямые пересекаются в начале координат. Расположение интегральных кривых см. на рис. 2.

3. С помощью метода изоклин приближённо начертить решения уравнения: $y'=2x-y$.

Решение. Уравнение семейства изоклин $2x-y=k$ или в привычном виде $y=2x-k$. Изоклинами являются прямые. Как и в предыдущих примерах построим сеть изоклин.

При $k=0$ получаем изоклину $y=2x$. Нулевая изоклина даёт уравнение линии, на которой находятся точки максимума и минимума интегральных кривых. Эта прямая делит плоскость на две части, в каждой из которых производная имеет один и тот же знак. В нашем случае касательные, проведённые к интегральным кривым в точке пересечения с изоклиной $k=0$, образуют нулевой угол с осью Ox.

При $k=1$ изоклина $y=2x-1$, интегральные кривые имеют угол наклона касательных $\pi/4$.

При $k=-1$ изоклина $y=2x-2$, интегральные кривые имеют угол наклона касательных $3\pi/4$.

Проверим, встречаются ли среди изоклин интегральные кривые. Для этого подставим уравнение семейства изоклин в наше дифференциальное уравнение. Получим $2=2x-2x+2$ или $2=2$, т. е. мы получили тождество.