

В. Е. Шешарулин

Дифференциально-геометрические
свойства уравнений
одномерной изэнтропической
газовой динамики

ФГУП «Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики

В. Е. Шемарулин

**Дифференциально-геометрические свойства
уравнений одномерной изэнтропической
газовой динамики**

Монография

Саров
2015

УДК 517.95, 514.86
ББК 22.161.6, 22.151
Ш46

Рецензенты: зав. кафедрой прикладной математики ФБГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН» доктор физ.-мат. наук, профессор Л. А. Уварова, доктор физ.-мат. наук А. Б. Надыкто

Шемарулин В. Е.

Ш46 Дифференциально-геометрические свойства уравнений одномерной изэнтропической газовой динамики : монография / В. Е. Шемарулин. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015. – 199 с., ил.

ISBN 978-5-9515-0302-2

В монографии изложены результаты аналитического исследования уравнений одномерной изэнтропической газовой динамики, принадлежащих одному из важнейших классов уравнений механики сплошных сред. Решен ряд задач проблемного характера, имеющих большое теоретическое и прикладное значение. Основные результаты принадлежат автору, получены впервые и имеют законченный характер.

Инструментами исследования являются современные групповые и дифференциально-геометрические методы, в частности теория высших симметрий и законов сохранения, методы формальной теории дифференциальных уравнений, контактной геометрии и теории алгебр Ли.

Главными математическими результатами, представленными в монографии, являются: исчерпывающее описание пространств высших (локальных) симметрий и законов сохранения рассматриваемых уравнений, исследование структурных свойств этих пространств, развитие аналитических методов решения возникающих при этом переопределенных систем уравнений и методов исследования структуры алгебр симметрий.

К числу наиболее значимых относятся также результаты решения ряда классификационных и прикладных задач и выяснение геометрической природы некоторых свойств уравнений одномерной газодинамики. В частности, здесь проведена классификация уравнений по показателю адиабаты газа, найдены новые классы точных решений, получена явная формула для глобального решения задачи Коши на плоскости перемешанных годографа, найдены обобщения оператора Дарбу из теории одномерных изэнтропических течений политропного газа, установлена групповая природа всех этих обобщенных операторов, обнаружена связь уравнений газовой динамики с комбинаторикой.

Для специалистов в области прикладной математики и математической физики.

УДК 517.95, 514.86
ББК 22.161.6, 22.151

ISBN 978-5-9515-0302-2

© ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015
© В. Е. Шемарулин, 2015

Содержание

Основные обозначения	7
Введение	11
Глава 1. Предварительные сведения об уравнениях газовой динамики	23
1.1 Дифференциальные уравнения газовой динамики	23
1.2 Установившиеся течения. Интеграл Бернулли	26
1.3 Безвихревые изэнтропические течения. Интеграл Коши–Лагранжа. Уравнение для потенциала скоростей	27
1.4 Одномерные изэнтропические течения с плоскими волнами. Инварианты Римана	29
Глава 2. Высшие симметрии и законы сохранения уравнений одномерных плоских изэнтропических течений политропного газа	33
2.1 Основные понятия и конструкции теории высших симметрий и законов сохранения	36
2.2 Линеаризация уравнения для потенциала скоростей преобразованием Лежандра. Сведение к уравнению Эйлера–Дарбу \mathcal{Y}_n	45
2.3 Внутренние координаты на $\mathcal{Y}_{n,\infty}$ и некоторые формулы для операторов полного дифференцирования	47
2.4 Алгебра контактных симметрий уравнения \mathcal{Y}_n и его операторы рекурсии первого порядка; $n \neq 0, -1$	49
2.5 Симметрии высших порядков $\varphi \in C^\infty(J^l)$, $l \geq 2$ уравнения \mathcal{Y}_n ; $n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(l-1), -l$	53
2.6 Описание алгебры $\text{Sym } \mathcal{Y}_n$ высших симметрий уравнения \mathcal{Y}_n ; $n \notin \mathbb{Z}$	74
2.7 Описание группы локальных законов сохранения для уравнения \mathcal{Y}_n ; $n \notin \mathbb{Z}$. Фундаментальный закон сохранения	75
2.8 О симметриях и законах сохранения уравнения \mathcal{Y}_n при $n \in \mathbb{Z}$	81

2.9	Базис локальных законов сохранения для системы уравнений одномерной газовой динамики. О гамильтоновых симметриях системы	83
-----	--	----

Глава 3. Структура алгебр высших симметрий и локальные эквивалентности уравнений Эйлера–Дарбу 95

3.1	Линейные базисы алгебры $\text{NSym}\mathcal{Y}_n$. Некоторые изоморфизмы	97
3.2	Формулы коммутирования для операторов рекурсии. Разложение $\text{NSym}\mathcal{Y}_n$ в прямую сумму нечетномерных неприводимых sl_2 -модулей	99
3.3	Об идеалах и подалгебрах в $\text{Sym}\mathcal{Y}_n$ и $\text{NSym}\mathcal{Y}_n$. Каноническая градуировка алгебры $\text{NSym}\mathcal{Y}_n$	101
3.4	Размерность пространств $R(u)$ -инвариантных решений уравнения \mathcal{Y}_n ; $R(u) \in \text{NSym}\mathcal{Y}_n$	104
3.5	Условие изоморфности алгебр $\text{Sym}\mathcal{Y}_n$ и $\text{Sym}\mathcal{Y}_m$ и локальной эквивалентности уравнений \mathcal{Y}_n и \mathcal{Y}_m , $n, m \notin \mathbb{Z}$. Примеры нелокальных эквивалентностей уравнений \mathcal{Y}_n и \mathcal{Y}_m	105
3.6	Описание полного множества локальных эквивалентностей уравнений \mathcal{Y}_n и \mathcal{Y}_m ; $n, m \notin \mathbb{Z}$	112
3.7	Представление алгебры $[U(L)/(\Delta_n)]_L$ линейными обыкновенными дифференциальными операторами	114
3.8	Описание полного множества изоморфизмов g алгебр $\text{NSym}\mathcal{Y}_n$ и $\text{NSym}\mathcal{Y}_m$, удовлетворяющих условию $g(\text{NSym}\mathcal{Y}_n) = \text{NSym}\mathcal{Y}_m$ в случае $n, m \notin \mathbb{Z}$; $n, m \neq \frac{1}{2}(\pm i - 1)$, $i = 2, 4, 6, \dots$	121

Глава 4. Локальные законы сохранения для одномерного волнового уравнения 125

4.1	Определяющая система уравнений для производящих функций законов сохранения	125
4.2	Отображение Грина. Общее решение определяющей системы уравнений. Описание пространства локальных законов сохранения	128
4.3	Два следствия	133

Глава 5. Базис контактных законов сохранения полиномиального типа в одномерной газовой динамике 137

5.1	Описание пространства контактных законов сохранения уравнения для потенциала скоростей	138
5.2	Операторы рекурсии и базис контактных законов сохранения полиномиального типа	142

5.3	Дифференциальные соотношения для одного класса специальных полиномов. Общие решения дифференциальных уравнений, определяющих эти полиномы	146
Глава 6. Фундаментальная система решений уравнений одномерных плоских изэнтропических течений политропного газа		149
6.1	Фундаментальная система однородных полиномиальных решений линейного уравнения для потенциала Лежандра . . .	150
6.2	Решение задачи Коши с аналитическими начальными данными на плоскости переменных годографа	151
6.3	Биномиальные представления для коэффициентов однородных полиномиальных решений	153
6.4	Однородные полиномиальные решения и операторы рекурсии	154
6.5	Примеры газодинамических течений, определяемых фундаментальными полиномами низших степеней	155
Глава 7. Операторы типа Дарбу в одномерной газовой динамике		159
7.1	Оператор Дарбу в теории одномерных течений политропного газа	159
7.2	Уравнения одномерной изэнтропической газовой динамики на плоскости переменных годографа	162
7.3	Формальная связь уравнений в переменных Эйлера и Лагранжа. Оператор типа Дарбу и ассоциированный с ним оператор рекурсии	166
7.4	Групповая природа оператора типа Дарбу. Связь с галилеевской инвариантностью уравнений газовой динамики	174
Заключение		177
Список литературы		181

162. Дарьин Н. А. Алгебра операторов симметрии для инвариантного уравнения нелинейного переноса // ТМФ. 1995. Т. 105, № 3. С. 364–370.
163. Деревенский В. П. Разрешимость в квадратурах линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в присоединенном представлении алгебр Ли // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 699–702.
164. Деревенский В. П. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка в присоединенном представлении простых алгебр Ли // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1675–1683.
165. Деревенский В. П. Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1925–1926.
166. Деревенский В. П. Общий тип линейных дифференциальных уравнений третьего порядка в присоединенном представлении разрешимых алгебр Ли // Изв. вузов. Сер. Математика. 1996. № 3. С. 29–37.
167. Деревенский В. П. Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. заметки. 1999. Т. 66. Вып. 1. С. 63–75.
168. Дубров Б. М., Комраков Б. П. Симметрии вполне интегрируемых распределений // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 2. С. 151–153.
169. Дымников В. П. Об общих представлениях интегральных законов сохранения нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 2. С. 173–175.
170. Зильберглейт Л. В. Симметрии и законы сохранения задач Минковского и Александрова // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 2. С. 270–275.
171. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Симметрии нелинейных управляемых систем // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 2. С. 155–157.
172. Киселев А. В. Классические законы сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. Физика. Астрономия. 2000. № 6. С. 11–13.
173. Магадеев Б. А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 141–156.
174. Маликова Д. Р., Эскин Л. Д. Приближенные симметрии уравнения конвективного теплопереноса и их приложения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1385–1393.
175. Сенатов С. И. Группы Ли и классификация упругих материалов // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 6. С. 712–713.
176. Тимошин М. И. Касательные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 76–77.

177. Устинов М. Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1966. № 3. С. 68–74.
178. Ферапонтов Е. В. Преобразования по решению и их инварианты // Диф. уравнения. 1989. № 7. С. 1256–1265.
179. Юмагузин В. А. Локальная классификация линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2001. Т. 377, № 5. С. 605–607.
180. *Geometry in Partial Differential Equations* / Ed. by A. Prastaro and Th. M. Rassias. Singapore: World Scientific, 1994.
181. *Interplay between Differential Geometry and Differential Equations* / Ed. by V. V. Lychagin. American Mathematical Society Translations. Series 2. Vol. 167. 1995.
182. Willard Miller, Jr. Symmetries of differential equations. The hypergeometric and Euler–Darboux equations // SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, № 2. P. 314–328.

XV. Публикации автора по теме монографии

183. Шемарулин В. Е. Высшие симметрии и законы сохранения уравнения одномерных плоских изэнтропических течений политропного газа // Матем. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 3. С. 138–140.
184. Шемарулин В. Е. Контактные симметрии и законы сохранения некоторых уравнений газовой динамики // Матем. заметки. 1990. Т. 48. Вып. 3. С. 154–156.
185. Шемарулин В. Е. Фундаментальная система решений уравнения одномерных плоских изэнтропических течений политропного газа // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1990. Вып. 1. С. 35–40.
186. Шемарулин В. Е. Базис контактных законов сохранения полиномиального типа в одномерной газовой динамике // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1991. Вып. 1. С. 44–50.
187. Шемарулин В. Е. Базис контактных законов сохранения в одномерной газовой динамике // ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 4. С. 851–855. (English translation // Soviet Physics Doklady. 1991. Vol. 36 (10). P. 680–682).
188. Шемарулин В. Е. Высшие законы сохранения для одномерного волнового уравнения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1992. Вып. 1. С. 11–17.

189. Шемарулин В. Е. Геометрическое исследование некоторых уравнений газовой динамики. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МГУ, 1992.
190. Шемарулин В. Е. Операторы типа Дарбу в одномерной газовой динамике // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1993. Вып. 1. С. 38–43.
191. Шемарулин В. Е. Контактные симметрии и законы сохранения некоторых уравнений изэнтропической газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1993. Вып. 3. С. 9–15.
192. Шемарулин В. Е. Структура алгебр высших симметрий и локальные эквивалентности уравнений Эйлера–Дарбу // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 1. С. 24–27 (English translation // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol. 47, № 3. P. 383–388).
193. Шемарулин В. Е. Базис локальных законов сохранения в одномерной газовой динамике // Тезисы докладов Международной школы-семинара «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа». Арзамас-16, 1994. С. 122.
194. Shemarulin V. E. Higher symmetries and conservation laws of Euler–Darboux equations // Geometry in Partial Differential Equations / Ed. by A. Prastaro and Th. M. Rassias. Singapore: World Scientific, 1994. P. 389–422.
195. Shemarulin V. E. Higher symmetry algebra structures and local equivalences of Euler–Darboux equations // Interplay between Differential Geometry and Differential Equations / Ed. by V. V. Lychagin. American Mathematical Society Translations. Series 2. Vol. 167. 1995. P. 217–243.
196. Shemarulin V. E. The local conservation laws basis for one-dimensional gas dynamics, Hamiltonian symmetries, Euler–Darboux equation // Nonlinear Mathematical Analysis and its Applications / Ed. by Th. M. Rassias. Florida, USA: Hadronic Press Inc., 1998. P. 235–256.

XVI. Литература общего характера

197. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
198. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
199. Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

200. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
201. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
202. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
203. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
204. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
205. Какичев В. А., Ле Динь Зон. Система двух уравнений Эйлера–Дарбу. Деп. рукоп. № 1679-В89. М.: ВИНТИ, 1989.
206. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
207. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
208. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит., 1962.
209. Крикунов Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986.
210. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
211. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностран. лит., 1958.
212. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
213. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
214. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
215. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.

XVII. Литература к заключению

216. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. С. 852–864.
217. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Шемарулин В. Е. и др. Описание систе-

- мы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Часть 2. Тесты 8–15 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 1991. Вып. 2. С. 10–14.
218. Нерешенные задачи группового анализа. Часть 1 / Составитель С. И. Сенашов. Красноярск: изд-во Красноярского госуд. ун-та, 1989.
219. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности // Докл. РАН. 1995. Т. 345, № 5. С. 619–620.
220. Shemarulin V. E. A direct method for solving boundary-value problems // International Conference on Secondary Calculus and Cohomological Physics. Moscow, August, 1997. <http://www.emis.de/proceedings/SCCP97/>.
221. Шемарулин В. Е. Прямой метод решения краевых задач // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 2. С. 168–170.
222. Шемарулин В. Е. О нелокальном операторе рекурсии и базисе полиномиальных решений для уравнения фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде // Тезисы докладов Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 2000. С. 62–64.
223. Шемарулин В. Е. О нелокальном операторе рекурсии и базисе полиномиальных решений для уравнения фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математич. моделирование физич. процессов. 2000. Вып. 4. С. 53–57.

Научное издание

Шемарулин Валерий Евгеньевич

Дифференциально-геометрические свойства
уравнений одномерной изэнтропической
газовой динамики

Монография

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 19.08.15 Формат 70×100/16

Уч.-изд. л. ~ 14,6 Усл. печ. л. ~ 16,1

Тираж 200 экз. Заказ 1273-2015

Печать офсетная

Отпечатано в Издательско-полиграфическом
комплексе ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23