В.И. Ильгисонис

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ГИДРОДИНАМИКУ

Учебное пособие

Москва
Российский университет дружбы народов
2010

ББК 22.253.31
И 45

Утверждено
*РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов*

Рецензент –
доктор физико-математических наук, академик РАН *В.Д. Шафранов*

Ильгисонис В.И.
И 45 Введение в теоретическую гидродинамику: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2010. – 129 с.

ISBN 978-5-209-03561-9

Дается конспективное изложение семестрового лекционного курса, который рассчитан на студентов старших курсов, прослушавших университетские курсы математического анализа, уравнений в частных производных, теоретической механики и имеющих представление о методах векторного анализа и вариационного исчисления. Данный курс представляет собой систематическое изложение теоретических основ динамики жидких сред, опирающееся на активное использование лагранжево-гамильтонового формализма. Такой подход позволяет проследить преемственность гидродинамики и классической механики и на практике использовать мощные методы последней. Одна из важных задач курса состоит в обучении студентов современным математическим методам и понятиям, активно используемым в гидродинамике, к числу которых относятся, например, понятия производной Ли, симметрии уравнений, казимира и т.д. Курс начинается с введения понятий пассивного скаляра и инварианта движения жидкой среды, т.е. с кинематики жидкости. Вопросы кинематики практически не рассматриваются в классических курсах гидродинамики, тогда как они закладывают необходимую основу для последовательного построения лагранжевой теории. Далее на примерах идеальной и магнитной гидродинамик обсуждается в целом нетривиальная задача построения лагранжиана жидкой среды, разъясняется понятие инварианта в гидродинамике. Особое внимание уделяется обсуждению теоремы Нетер для жидких сред и ее интерпретации. На примере маркировочных симметрий в магнитной гидродинамике демонстрируется, как использование теоремы Нетер приводит к отысканию нетривиальных законов сохранения. Несколько лекций посвящено проблеме поиска симметрий гидродинамических уравнений, обучению технике Ли и систематическому методу нахождения законов сохранения путем отыскания вариационных симметрий, свойственных, в том числе, многожидкостным гидродинамическим уравнениям. Необходимо подчеркнуть, что в данном курсе совершенно не затрагивается целый ряд вопросов, обычно рассматриваемых в курсах по гидродинамике, например, обтекание тел, звук, ударные волны, турбулентность и пр. Курс ориентирован не на последующее решение прикладных задач гидромеханики, а на обучение будущих физиков-теоретиков необходимым основам теории поля, выходящим за рамки традиционных университетских курсов гидродинамики и электромагнетизма.

Учебное пособие подготовлено на кафедре экспериментальной физики факультета физико-математических и естественных наук.

ISBN 978-5-209-03561-9 ББК 22.253.31

Содержание

Условные обозначения 5

Предисловие 6

Лекция 1 **9**

Макроскопическое описание сплошной среды. Кинематика жидкости: лагранжевы координаты, ко- и контрвариантные базисы, якобиан перехода. Лагранжевы и эйлеровы инварианты. Идеальная гидродинамика. Уравнения непрерывности, движения (Эйлера), адиабаты.

Лекция 2 **15**

Простейшие законы сохранения в идеальной гидродинамике. Сохранение завихренности. Потенциалы Клебша. Неоднозначность потенциалов Клебша и проблема калибровки. Лагранжево представление уравнений гидродинамики при помощи потенциалов Клебша, его особенности и недостатки.

Лекция 3 **22**

Интегрирование уравнений непрерывности, адиабаты и завихренности. Лагранжиан идеальной жидкости. Гамильтоново представление идеальной ГД. Неканонические скобки Пуассона. Уравнения Эйлера как канонические гамильтоновы уравнения для лагранжевых координат.

Лекция 4 **30**

Производная Ли. Геометрический смысл инварианта движения. Инвариантные скаляр, вектор, 1-форма. Общее условие инвариантности. Теорема об эквивалентности инвариантов в смысле Ли и в смысле Лагранжа.

Лекция 5 **37**

Уравнения идеальной магнитной гидродинамики (МГД). Уравнение вмороженности как постоянство магнитного поля в смысле Ли. Топология магнитного поля (рациональные поля, магнитные поверхности, эргодические поля). Представление магнитного поля в терминах лагранжевых координат. Сохранение топологии магнитного поля при МГД-эволюции.

Лекция 6 **43**

Лагранжиан и гамильтониан идеальной МГД. Вывод уравнения движения в лагранжевых координатах.

Лекция 7 **47**

Законы сохранения идеальной МГД (энергии, импульса, перекрестной спиральности, интегральной магнитной спиральности). Локальное сохранение магнитной спиральности при калибровке Эльзассера. Понятие инварианта Хопфа.

Лекция 8 **52**
Вариационные симметрии лагранжевых систем. Теорема Нетер. Комментарии к теореме Нетер.

Лекция 9 **55**
Вариационные симметрии идеальной МГД. Преобразования перемаркировки. Общий закон сохранения, отвечающий маркировочной симметрии.

Лекция 10 **59**
Группы и алгебры Ли. Инфинитезимальные преобразования Ли. Канонические координаты. Расширенный инфинитезимальный генератор. Симметрии Ли для уравнений в частных производных. Симметрии Ли-Бэклунда. Теорема Ольвера.

Лекция 11 **64**
Симметрии уравнения теплопроводности.

Лекция 12 **69**
Инвариантные решения.

Лекция 13 **73**
Двоякая трактовка уравнений Максвелла. Многожидкостная гидродинамика – модель многокомпонентной плазмы. Лагранжиан и симметрии МКП.

Лекция 14 **80**
Электронная МГД: лагранжиан, симметрии, законы сохранения.

Лекция 15 **89**
Холловская МГД: область применимости, снятие вырождения одножидкостной МГД, симметрии. Законы сохранения как частные случаи законов сохранения МКП.

Лекция 16 **95**
ХМГД равновесие. Одножидкостный предел. Спонтанное нарушение симметрии и перенормировки.

Лекция 17 **102**
Примеры холловских равновесий.

Решение лекционных задач 108

Варианты вопросов к экзамену 122

ђqddчеЎ ɓɆ dədɆɓЎзə d ɘɔɑɓɔч ɟqddЎqчè

Некоторые условные обозначения

$\forall$	– любой, для любого
$\exists$	– существует
$\Rightarrow$	– значок логического следования
$\in$	– принадлежит
$\{\alpha^i\}$	– набор переменных α^i (т.е. $\alpha^1,\ \alpha^2 \ldots$)
$\otimes$	– символ прямого произведения
$\wedge$	– символ косого произведения
$I\!R$	– поле действительных чисел
$I\!R^n$	– n-мерное евклидово пространство
$\mathbf{A}(\nabla)\mathbf{B}$	$= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{A} \times \mathrm{rot}\mathbf{B}]$
q.e.d.	– quod erat demonstrandum (что и треб. док.)
$\underset{k}{u}$	– весь набор частных производных u порядка k