

УДК 530.17:531.111(075.8)  
К 777

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *И.П. Олегин*  
д-р техн. наук, профессор *А.А. Кураев*

Работа подготовлена на кафедре прочности летательных аппаратов  
для студентов II курса очной и IV курса заочной формы обучения  
механико-технологического факультета

**Крамаренко Н.В.**

К 777 Методы подобия в механике. Анализ размерностей: учебное  
пособие / Н.В. Крамаренко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ,  
2020. – 212 с.

ISBN 978-5-7782-4087-2

Пособие написано на основе опыта чтения этого курса автором на  
механико-технологическом факультете НГТУ в течение восьми лет  
(с 2011 по 2018 год) и является продолжением ранее изданной части  
«Анализ уравнений».

Книга предназначена для двух аудиторий: для студентов младших  
курсов бакалавриата и студентов магистратуры. Основное содержание  
написано для первой аудитории, поэтому здесь отсутствуют тяжеловес-  
ные строгие математические доказательства теорем подобия. Для  
наглядности и простоты изложения сначала приводятся примеры и  
только затем дается общая схема применения метода. Если для того,  
чтобы разобраться в теории, излагаемой в первой части, было необхо-  
димо знать курсы теоретической механики и сопротивления материа-  
лов, то для понимания материала второй части достаточно только  
школьных знаний.

Для второй аудитории – студентов магистратуры, готовящихся к  
работе по проведению экспериментов, в книгу включены главы с ис-  
торическими сведениями, обзор литературы по способам вывода кри-  
териев подобия, подробный список первоисточников и ссылки на их  
электронные копии.

Содержание пособия нацелено на практическое применение раз-  
личных методов подобия в реально возникающих задачах для твердых  
тел, для жидкости и газа. Порядок рассуждений и алгоритмы действий  
при решении практических задач сопровождаются рисунками и таб-  
лицами с логическими схемами.

УДК 530.17:531.111(075.8)

ISBN 978-5-7782-4087-2

© Крамаренко Н.В., 2020  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<u>ПРЕДИСЛОВИЕ</u> .....	7
<u>ВВЕДЕНИЕ</u> .....	9
<u>В1. Механика</u> .....	9
<u>В2. Теория подобия</u> .....	10
<u>В3. Прогнозы на основании чисел подобия</u> .....	11
<u>В4. Историческая справка</u> .....	12
<u>В5. О видах подобия</u> .....	15
<u>В6. Термины</u> .....	16
<u>1. РАЗМЕРНОСТИ</u> .....	19
<u>1.1. Единицы измерения физических величин</u> .....	19
<u>1.2. Размерные и безразмерные величины</u> .....	20
<u>1.3. Основные и производные единицы измерения</u> .....	22
<u>1.4. Формула размерности</u> .....	23
<u>1.5. Системы единиц измерения</u> .....	25
<u>1.6. Классы систем единиц измерения</u> .....	27
<u>1.7. Пересчет в другие размерности</u> .....	29
<u>2. ЧЕМ ПОЛЕЗЕН АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ (АР)</u> .....	31
<u>2.1. АР помогает уточнить забытую формулу</u> .....	31
<u>2.2. АР помогает вывести неизвестную формулу</u> .....	33
<u>2.3. АР помогает сократить количество экспериментов</u> .....	35
<u>2.4. АР помогает выявить скрываемую информацию</u> .....	40
<u>2.5. Выводы по примерам</u> .....	44
<u>3. КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ АНАЛИЗОМ РАЗМЕРНОСТЕЙ</u> .....	45
<u>3.1. Три теоремы подобия</u> .....	45
<u>3.2. Примеры для обычных размерностей</u> .....	47
<u>3.2.1. Математический маятник</u> .....	47
<u>3.2.2. Физический маятник</u> .....	51
<u>3.2.3. Движение жидкости в трубе</u> .....	56

3.3. Векторные размерности	61
3.3.1. Пример для векторных длин	62
3.3.2. Другие векторные размерности	68
3.4. Выводы по примерам	70
3.5. Общая методика определения чисел подобия	70
4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ В СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ	72
4.1. Общая схема применения методов подобия	72
4.2. Общая методика сравнительного анализа	74
4.3. Общая методика моделирования	75
5. СПОСОБЫ ВЫВОДА ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ГРУЗА	78
5.1. Способ P1 – комбинации переменных, или способ непосредственных рассуждений, или способ Бертрана	80
5.2. Ранние способы P2 – Апелля, Федермана, Толмэна, Ипсена	81
5.3. Способ P3 – преобразования формул размерностей в степенные комплексы	81
5.4. Способ P4 – частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема	82
5.5. Способ P5 – полного двустороннего комплекса, или способ Рэля	86
5.6. Способ P6 – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия	89
5.7. Способ P7 – качественного физико-математического анализа, или способ Морозова	94
5.8. Выводы по способам P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	97
6. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ	98
6.1. Закон Кеплера	98
6.1.1. Историческое введение	98
6.1.2. Пример 1 – гравитационная постоянная	100
6.1.3. Пример 2 – период обращения планеты	100
6.2. Задача Галилея – падение тела	103
6.2.1. Подход 1 – с учетом массы тела	103
6.2.2. Подход 2 – без учета массы тела	104
6.2.3. Подход 3 – с учетом массы и веса тела	105

6.2.4. Подход 4 – с учетом скорости тела	107
6.2.5. Выводы по примеру	109
<b>7. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ</b>	110
7.1. Статическая жесткость и прочность	110
7.1.1. Задача 1 – общие условия подобия	110
7.1.2. Задача 2 – подобие напряжений	117
7.1.3. Задача 3 – подобие деформаций	120
7.1.4. Выводы по примеру (задачи 1, 2, 3)	124
7.1.5. Добавление из сопротивления материалов	125
7.2. Статический изгиб балки	126
7.2.1. Подход 1 – класс размерностей $LMT$	128
7.2.2. Подход 2 – класс размерностей $LF$	133
7.2.3. Подход 3 – класс векторных размерностей $L_x L_y F$	135
7.2.4. Подход 4 – класс векторных размерностей $L_x L_y L_z F \Theta$ для поворота	138
7.2.5. Подход 5 – класс векторных размерностей $L_x L_y L_z F \Theta$ для прогиба	141
7.3. Удар	144
<b>8. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ</b>	150
8.1. Движение жидкости в трубе	150
8.2. Движение жидкости через водослив	157
8.3. Обтекание тела газом или невесомой жидкостью	159
8.3.1. Вывод критериального уравнения	159
8.3.2. Алгоритм проведения экспериментов	162
8.3.3. Добавление из аэродинамики	163
8.4. Движение корабля с учетом волнообразования	164
8.4.1. Частичное моделирование без учета вязкости жидкости	164
8.4.2. Полное моделирование с учетом вязкости жидкости	167
8.4.3. Удешевление экспериментов	170
<b>9. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ РАЗНЫЕ</b>	172
9.1. Опоздание студента	172
9.2. Крупные перевозки дешевле	175
9.2.1. Перевозки судами	175

<a href="#">9.2.2. Перевозки самолетами</a>	180
<a href="#">9.2.3. Размеры двигателей</a>	181
<a href="#">9.3. Парадокс Рябушинского</a>	181
<a href="#">10. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО СПОСОБАМ ВЫВОДА ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ</a>	185
<a href="#">10.1. Способ P1 – комбинации переменных, или непосредственных рассуждений, или способ Бертрانا</a>	185
<a href="#">10.2. Ранние способы P2</a>	186
<a href="#">10.3. Способ P3 – преобразования формул размерностей в степенные комплексы</a>	187
<a href="#">10.4. Способ P4 – частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема</a>	187
<a href="#">10.5. Способ P5 – полного двустороннего комплекса, или способ Рэля</a>	188
<a href="#">10.6. Способ P6 – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия</a>	189
<a href="#">10.7. Способ P7 – качественного физико-математического анализа, или способ Морозова</a>	190
<a href="#">Выводы</a>	190
<a href="#">ЗАКЛЮЧЕНИЕ</a>	192
<a href="#">31. Общая схема применения методов подобия</a>	192
<a href="#">32. Достоинства анализа размерностей</a>	192
<a href="#">33. Недостатки анализа размерностей</a>	193
<a href="#">34. Сопоставление анализа размерностей и анализа уравнений</a>	194
<a href="#">БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</a>	195
<a href="#">Приложение 1. Термины и определения</a>	200
<a href="#">Приложение 2. Десятичные приставки</a>	203
<a href="#">Приложение 3. Система единиц измерения СИ</a>	204
<a href="#">Приложение 4. Рисунки к законам Кеплера</a>	210