

УДК 519.6
ББК 22.193
К 651



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 09-01-07090

Конт Р. М., Мюзетт М.

Метод Пенлеве и его приложения. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 340 с.

Нелинейные дифференциальные уравнения встречаются не только в математике, но и во многих областях физики, химии и биологии. Предлагаемая монография знакомит читателя с методами решения этих уравнений в явном виде. Первостепенная цель — научить читателя оценивать свои шансы на успех, не имея никаких априорных представлений о решении. Для этого используется так называемый тест Пенлеве — мощный алгоритм, подробно рассматриваемый в книге. Если нелинейное дифференциальное уравнение проходит тест Пенлеве, то оно считается интегрируемым. Если же уравнение не проходит тест Пенлеве, то система является неинтегрируемой или даже хаотической. В этом случае, однако, по-прежнему можно найти ее решения. Описанные методы иллюстрируются, главным образом, примерами из физики. К ним относятся: нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега–де Фриза, гамильтонианы Хено–Хейлеса. Все они являются интегрируемыми. К неинтегрируемым же примерам относятся: комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, уравнение Курамото–Сивашинского, реакционно-диффузионная модель Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП), модель атмосферной циркуляции Лоренца и космологическая модель IX по Бьянки.

ISBN 978-5-93972-883-6

ББК 22.193

© Р. М. Конт, М. Мюзетт, 2011

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011

Оригинальное издание *The Painlevé Handbook by Robert Conte, Micheline Musette* впервые опубликовано на английском языке в 2008 году издательством *Springer Science+Business Media* совместно с *Canopus Publishing Limited*.

На обложке использованы портреты С. Ковалевской, А. Пуанкаре (слева), Л. Фукса, П. Пенлеве (справа).

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	xii
Краткий обзор книги	xiv
Список сокращений	xxiv
ГЛАВА 1. Введение	1
1.1. Особые точки на комплексной плоскости	1
1.1.1. Метод возмущений	2
1.1.2. Метод, не использующий возмущения	4
1.2. Свойство Пенлеве и шесть трансцендент	7
ГЛАВА 2. Анализ особых точек: тест Пенлеве	12
2.1. Метод Ковалевской–Гамбье	12
2.1.1. Модель Лоренца	13
2.1.2. Уравнение Курамото–Сивашинского (КС)	18
2.1.3. Кубическое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КГЛЗ)	21
2.1.4. Осциллятор Дуффинга–ван дер Поля	25
2.1.5. Система Хенона–Хейлеса	26
2.2. Метод возмущений Фукса	32
2.3. Нефуксов метод возмущений	36
ГЛАВА 3. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений	37
3.1. Интегрируемые случаи	38
3.1.1. Первые интегралы и интегрирование модели Лоренца	38
3.1.1.1. Случай $(1, 1/2, 0)$	40
3.1.1.2. Случай $(2, 1, 1/9)$	40
3.1.1.3. Случай $(0, 1/3, r)$	41
3.1.1.4. Случай $(1, 0, r)$	42
3.1.2. Общее решение уравнения Кортевега–де Фриза (КДФ) в виде бегущей волны	43

3.1.3.	Общее решение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в виде бегущей волны	45
3.2.	Частично интегрируемые уравнения	49
3.2.1.	Редукция уравнений Курамото–Сивашинского и комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау третьей степени в переменных бегущей волны	49
3.2.1.1.	Отсутствие первого интеграла	50
3.2.1.2.	Подсчет произвольных постоянных	50
3.2.2.	Эллиптические решения в переменных бегущей волны	53
3.2.2.1.	Необходимые условия для эллиптических решений	54
3.2.2.2.	Эллиптические решения	55
3.2.3.	Тригонометрические бегущие волны КС	57
3.2.3.1.	Калибровочное преобразование	57
3.2.3.2.	Полиномы по степеням th	59
3.2.4.	Тригонометрические решения в переменных бегущей волны уравнения КГЛЗ	63
3.2.4.1.	Полиномы по th	65
3.2.4.2.	Полиномы по th и $sech$	68
3.2.5.	Общий метод построения эллиптических решений с учетом переменных бегущей волны	73
3.2.5.1.	Класс эллиптических функций	73
3.2.5.2.	Два результата Брио и Буке	74
3.2.5.3.	Метод нахождения всех эллиптических решений	75
3.2.5.4.	Приложение к уравнению КдФ	78
3.2.5.5.	Приложение к уравнению КС	79
3.2.5.6.	Приложение к уравнению КГЛЗ	81
3.2.6.	Первый интеграл осциллятора Дuffинга–ван дер Поля	83
3.2.7.	Однозначные решения для космологической модели Бьянки IX	84
3.2.8.	Результаты применения теории Неванлинны к КС и КГЛЗ	87
ГЛАВА 4.	Уравнения в частных производных: тест Пенлеве	90
4.1.	О редукциях УЧП	92
4.2.	Солитонные уравнения	94
4.3.	Свойство Пенлеве для УЧП	97
4.4.	Тест Пенлеве для УЧП	100
4.4.1.	Оптимальная переменная при разложении в ряд Лорана	101

4.4.2.	Интегрируемый случай. Пример КдФ	103
4.4.3.	Частично интегрируемый случай. Пример КПП	106
ГЛАВА 5.	От теста к решениям УЧП в явном виде	109
5.1.	Глобальная информация от теста	109
5.2.	Построение N -солитонных решений	110
5.3.	Инструменты интегрирования	111
5.3.1.	Пара Лакса	112
5.3.2.	Преобразование Дарбу	114
5.3.3.	Преобразование Крама	116
5.3.4.	Сингулярная часть преобразования	117
5.3.5.	Формула нелинейной суперпозиции	119
5.4.	Выбор порядка пар Лакса	121
5.4.1.	Пары Лакса второго порядка и их преимущество	121
5.4.2.	Пары Лакса третьего порядка	122
5.5.	Метод сингулярного многообразия	123
5.5.1.	Алгоритм	123
5.5.2.	Степень усечения и выбор переменной	126
5.6.	Приложение к интегрируемым уравнениям	129
5.6.1.	Случай одного семейства: уравнения КдФ и Буссинеска	129
5.6.1.1.	Случай уравнения КдФ	130
5.6.1.2.	Случай уравнения Буссинеска	133
5.6.2.	Случай двух семейств: уравнение синус-Гордона и модифицированное уравнение КдФ	137
5.6.2.1.	Уравнение синус-Гордона	139
5.6.2.2.	Модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза	142
5.6.3.	Третий порядок: Савада–Котера и Каупа–Купершмидта	145
5.6.3.1.	Помощь от классификации Гамбье	146
5.6.3.2.	Структура особенностей уравнений СК и КК	148
5.6.3.3.	Метод усечения с парой Лакса второго порядка	150
5.6.3.4.	Метод усечения с парой Лакса третьего по- рядка и уравнением $G5$	151
5.6.3.5.	Метод усечения с парой Лакса третьего по- рядка и уравнением $G25$	151
5.6.3.6.	Преобразование Беклунда	152
5.6.3.7.	Нелинейная формула суперпозиции	153
5.7.	Приложение к частично интегрируемым уравнениям	155
5.7.1.	Случай одного семейства особых точек: уравнение Фишера	156

5.7.2.	Случай двух семейств особых точек: уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП)	159
5.8.	Редукция метода сингулярного многообразия для ОДУ	164
5.8.1.	От пары Лакса к изомонодромной деформации	164
5.8.2.	От преобразования Беклунда к бирациональному преобразованию	167
5.8.3.	От формулы нелинейной суперпозиции к контигуальному соотношению	169
5.8.4.	Переформулирование метода сингулярного многообразия: дополнительное дробно-рациональное преобразование	171
ГЛАВА 6.	Интегрирование гамильтоновых систем	174
6.1.	Различные определения интегрируемости	174
6.2.	Кубические гамильтонианы Хенона–Хейлеса	176
6.2.1.	Вторые инварианты	176
6.2.2.	Разделение переменных	176
6.2.2.1.	Случай $\beta/\alpha = -6$ (КдФ5)	177
6.2.2.2.	Случай $\beta/\alpha = -1$ (СК) и -16 (КК)	178
6.2.3.	Непосредственное интегрирование	182
6.3.	Гамильтонианы Хенона–Хейлеса четвертого порядка	184
6.3.1.	Вторые инварианты	184
6.3.2.	Разделение переменных	185
6.3.2.1.	Случай $1 : 2 : 1$ (система Манакова)	186
6.3.2.2.	Случаи $1 : 6 : 1$ и $1 : 6 : 8$	187
6.3.2.3.	Случай $1 : 12 : 16$	191
6.3.3.	Свойство Пенлеве	192
6.4.	Окончательная картина для XX3 и XX4	195
ГЛАВА 7.	Дискретные нелинейные уравнения	196
7.1.	Общие положения	196
7.2.	Дискретное свойство Пенлеве	200
7.3.	Дискретный тест Пенлеве	201
7.3.1.	Метод локализации сингулярности	201
7.3.2.	Метод полиномиального роста	205
7.3.3.	Метод возмущения при переходе к непрерывному пределу	208
7.4.	Дискретное уравнение Риккати	210
7.5.	Дискретные пары Лакса	211
7.6.	Точные дискретизации	213

7.6.1. Уравнение Ермакова–Пинни	213
7.6.2. Эллиптическое уравнение	217
7.7. Дискретные варианты нелинейного уравнения Шредингера	219
7.8. Очерк о дискретных уравнениях Пенлеве	220
7.8.1. Аналитический подход	221
7.8.2. Геометрический подход	222
7.8.3. Краткие выводы по дискретным уравнениям Пенлеве	224
ГЛАВА 8. Часто задаваемые вопросы	226
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Классические результаты Пенлеве и его последователей	231
A.1. Группы инвариантности, сохраняющие свойство Пенлеве	232
A.2. Свойство неприводимости. Классические решения	233
A.3. Классификации	235
A.3.1. ОДУ первого порядка высших степеней	235
A.3.2. ОДУ первой степени второго порядка	236
A.3.3. ОДУ второго порядка высших степеней	237
A.3.4. ОДУ первой степени третьего порядка	237
A.3.5. ОДУ первой степени четвертого порядка	237
A.3.6. ОДУ высших порядков первой степени	239
A.3.7. УЧП второго порядка первой степени	239
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Еще о трансцендентах Пенлеве	240
B.1. Последовательность слияний	241
B.2. Инвариантность относительно дробно-рациональных преобразований	245
B.3. Инвариантность относительно бирациональных преобразований	246
B.3.1. Нормальная последовательность	246
B.3.2. Несимметричная последовательность	248
B.4. Инвариантность относительно аффинных групп Вейля	250
B.5. Инвариантность относительно небирациональных преобразований	251
B.6. Гамильтонова структура	252
B.7. Пары Лакса	253
B.8. Классические решения	255

Приложение С. Краткие сведения об эллиптических функциях	259
С.1. Обозначение Якоби и Вейерштрасса	260
С.2. Симметричное обозначение Хальфена	261
Приложение D. Основы теории Неванлинны	264
Приложение E. Билинейный формализм	268
Е.1. Билинейное представление УЧП	268
Е.2. Билинейное представление преобразований Беклунда	270
Приложение F. Алгоритм расчета рядов Лорана	273
Предметный указатель	275
Литература	280