Sur la méthode d'intégration de M. Tchébychef.

Par G. ZOLOTAREFF à ST. PETERSBOURG.

Dans une note insérée dans le Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg*), M. Tchébychef a fait connaître, sans démonstration, sa méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

où α, β, γ, δ désignent des nombres rationnels. Suivant la marche indiquée par M. Tchébychef, on obtient cette intégrale une fois qu'il est possible de l'exprimer en termes finis; on démontre, dans le cas contraire, l'impossibilité d'une pareille expression.

Cette note de M. Tchébychef a été réimprimée dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville (1864 p. 225 et suiv.). Il est aisé de voir d'après les recherches d'Abel et de Jacobi que cette méthode est liée intimement au développement du radical $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ en fraction continue et aux fonctions elliptiques.

En étudiant cette liaison je suis parvenu non seulement à démontrer la méthode de M. Tchébychef, mais encore à trouver quelques relations nouvelles qui se rattachent au développement de $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ en fraction continue.

Je me propose de démontrer, dans ce mémoire, la méthode d'intégration de M. Tchébychef.

I.

Considérons, avec Jacobi**), deux Variables x et z liées par l'équation

$$(1)\quad (ax^2+2bx+c)z^2+2(a'x^2+2b'x+c')z+(a''x^2+2b''x+c'')=0$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(2)\quad (az^2+2a'z+a'')x^2+2(bz^2+2b'z+b'')x+(cz^2+2c'z+c'')=0$$

---

*) Voir: Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg. Tome III. 1860.
**) Jacobi. Mathematische Werke. Band 3. §. 83.

En posant

$$(a'x^2 + 2b'x + c')^2 - (a''x^2 + 2b''x + c'')(ax^2 + 2bx + c) = Rx$$
$$(bz^2 + 2b'z + b'')^2 - (az^2 + 2a'z + a'')(cz^2 + 2c'z + c'') = R_1 z$$

on obtient, en vertu des équations précédentes,

$$z = \frac{-(a'x^2 + 2b'x + c') \pm \sqrt{Rx}}{ax^2 + 2bx + c} \tag{3}$$

$$x = \frac{-(bz^2 + 2b'z + b'') \pm \sqrt{R_1 z}}{az^2 + 2a'z + a''} \tag{4}$$

L'équation (1) différentiée nous donne

$$\{(ax^2 + 2bx + c)z + (a'x^2 + 2b'x + c')\} dz$$
$$+ \{(az^2 + 2a'z + a'')x + (bz^2 + 2b'z + b'')\} dx = 0.$$

Or, des expressions de z et de x on déduit

$$(ax^2 + 2bx + c)z + (a'x^2 + 2b'x + c') = \pm \sqrt{Rx}$$
$$(az^2 + 2a'z + a'')x + (bz^2 + 2b'z + b'') = \pm \sqrt{R_1 z},$$

et par suite

$$\frac{dz}{\sqrt{R_1 z}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{Rx}}.$$

Au moyen de l'équation (1) on peut transformer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

en celle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

c'est-à-dire telle que le polynôme placé sous le radical contienne le facteur z. Déterminons à cet effet les constantes $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ de la sorte que Rx soit égal à $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ et que $R_1 z$ ait la forme $z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$.

On a alors les équations suivantes:

$$a'^2 - aa'' = 1,\ 4a'b' - 2ab'' - 2a''b = \alpha,$$
$$4b'^2 + 2a'c' - ac'' - a''c - 4bb'' = \beta,$$
$$4b'c' - 2bc'' - 2b''c = \gamma,\ c'^2 - cc'' = \delta,$$
$$b^2 - ac = 1,\ b''^2 - a''c'' = 0.$$

Comme il n'y a ci-dessus que sept équations servant à déterminer les neuf inconnues a, b, c etc., nous en pouvons choisir deux à volonté. La transformation employée par M. Tchébychef s'obtient en posant

$$a = 0,\ a'' = 0.$$

Des équations précédentes il vient

$$b'' = 0,\ a' = \pm 1,\ b = \pm 1.$$

Prenons $a' = 1$, $b = -1$.

Des mêmes équations on déduit

$$b' = \frac{\alpha}{4},\ c' = \tfrac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right),\ c'' = \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$c = -\frac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}.$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de la variable dans les expressions $R_1 z$ et $z^4 + lz^3 + mz^2 + n$, on obtient

$$l = -\alpha - \frac{(4\beta - \alpha^2)^2 - 64\delta}{2\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma}$$

$$m = -2\beta + \tfrac{3}{4}\alpha^2$$

$$n = -\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{8}\alpha^3$$

Quant aux signes devant les radicaux dans les formules (3) et (4) nous en choisirons dans la première le signe négatif et dans la seconde positif. —

D'après cela

$$z = \frac{x^2 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{4\beta - \alpha^2}{8} + \sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}{2x + \dfrac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}}$$

$$x = \frac{z^2 - \frac{\alpha}{2}z + \sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}{2z}$$

Les équations précédentes nous conduisent à celles-ci:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\left(z - \frac{\alpha}{2} + 2A\right)dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} + \tfrac{1}{2}\log z.$$

C'est la transformation dont se sert M. Tchébychef dans son mémoire.

II.

Maintenant nous allons établir les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'intégrale de la différentielle

$$\frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{Rz}}.$$

puisse s'exprimer en logarithmes.