Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Элементы теории графов. Изоморфизм, планарность, маршруты в графах

(*индивидуальные работы № 6 и 7 по дисциплине*

«Основы дискретной математики»)

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по
специальности Информационные технологии

Ярославль 2010

УДК 519.2
ББК В174я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009/10 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Рублев, В. С. Элементы теории графов. Изоморфизм, планарность, маршруты в графах: метод. указания
Р82 / В. С. Рублев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 84 с.

Методические указания содержат варианты индивидуальных заданий по темам “Изоморфизм и планарность графов”, “Маршруты в графах” дисциплины “Основы дискретной математики”, а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации и обоснования.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010400.62 Информационные технологии (дисциплина “Основы дискретной математики”, блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В174я73

1 Определения графов

Функциональное соответствие и его частный случай – взаимнооднозначное соответствие – наиболее простые бинарные отношения множеств. В общем случае, когда соответствие не является функциональным и элемент может иметь много образов, наглядное его представление – граф. Представление отношений в виде графов использовал еще Леонард Эйлер, но как наука теория графов возникла в 30-е годы прошлого века с выходом монографии Кенига “Теория графов”. В России первой книгой, посвященной этой теории, является книга Клода Бержа “Теория графов и ее приложения” в переводе профессора А.А. Зыкова (патриарха графистов на пространстве бывшего СССР), изданная в начале 1960-х годов. Она проста для чтения, достаточное количество экземпляров этой книги имеется в библиотеке ЯрГУ. С тех пор было издано очень много учебников и монографий по теории графов как зарубежных, так и отечественных авторов.

Конечный граф (в последующем термин “конечный” всегда будет подразумеваться) G определяется как пара конечных множеств, одно из которых называется множеством вершин графа (каждый элемент – вершина графа), а другое определяется как множество пар вершин (первого множества) и называется множеством ребер (каждый элемент – ребро, соединяющее 2 вершины графа). Таким образом, в обозначении $G(X,U)$ X – множество вершин, а U – множество ребер (пар вершин). Например,

$$G(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_3,x_4\}\})$$

– граф, содержащий 4 вершины x_1,x_2,x_3,x_4 и 3 ребра.

Геометрически вершины графа изображаются точками, а ребра — линиями, соединяющими эти вершины-точки. При этом неважно, где располагаются вершины и пересекаются или не пересекаются ребра. На рис. 1 приведены 3 изображения вышеприведенного графа G.

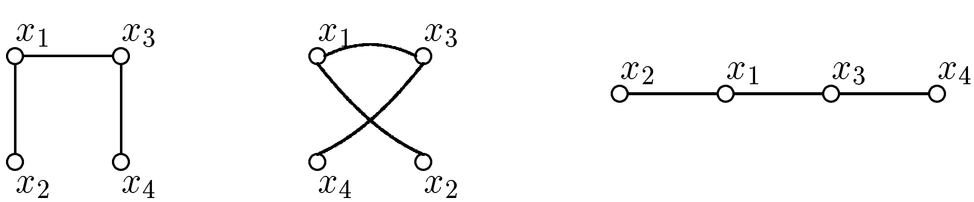

Рис. 1

Если в определении множества ребер U допустить пары одинаковых элементов (вершин), то каждая такая пара изображается линией, идущей из вершины в ту же самую вершину, а потому называется *петлей*, а соответствующий граф – *графом с петлями*. Примером служит следующий граф

$$G(\{x_1, x_2, x_3\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_2\}\}),$$

содержащий 3 вершины и 2 ребра, одно из которых петля (см. рис. 2).

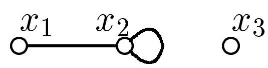

Рис. 2

Если в определении множества U ребер допустить повторяющиеся элементы (ребра), то получим *мультиграф*. Например, граф

$$G(\{y_1, y_2, y_3\}, \{\{y_1, y_2\}, \{y_2, y_3\}, \{y_3, y_2\}, \{y_2, y_3\}\})$$

содержит 3 ребра, соединяющих вершины y_2 и y_3 (см. рис. 3).

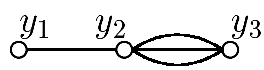

Рис. 3

Чаще всего мы будем рассматривать графы без петель и повторяющихся ребер, которые называют *обыкновенными графами*.

Если элементы множества U являются упорядоченными парами вершин, то граф называется *ориентированным графом*, или *орграфом*, а элементы множества U называются *дугами*. Например, орграф

$$G(\{y_1, y_2, y_3\}, \{(y_1, y_2), (y_2, y_1), (y_2, y_3)\})$$

содержит 3 вершины и 3 дуги, 2 из которых соединяют вершины y_1, y_2 и идут в разных направлениях. В наглядном изображении орграфа дуга – это стрелка, указывающая направление от вершины начала дуги к вершине конца дуги (см. рис. 4).

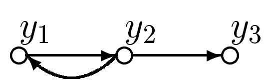

Рис. 4

Вершины x и y ребра $\{x, y\}$ называются *концами ребра*. Если вершина x является концом ребра u, то говорят, что x и u *инцидентны* (вершина x инцидентна ребру u, а ребро u инцидентно вершине x). Вершины x и y определяются как *смежные*, если существует ребро $\{x, y\}$, связывающее эти вершины (инцидентное этим вершинам). Два ребра u и v являются *смежными*, если они инцидентны одной и той же вершине.

Степень вершины x определяется как число $d(x)$ ребер, инцидентных x. Обозначим $n(G) \equiv |X|$ – число вершин графа $G(X, U)$, а $m(G) \equiv |U|$ – число ребер этого графа.

Занумеруем все вершины графа $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число ребер и степени вершин связаны следующим соотношением

$$m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(x_i),$$

которое обосновывается следующим образом: если мы просуммируем степени всех вершин, то мы пересчитаем дважды каждое ребро (один раз, когда мы учитываем ребро в степени одной из вершин, которой оно инцидентно, а второй раз, когда мы учитываем ребро в степени другой вершины, которой оно инцидентно).

В орграфе дуга имеет *начало* (вершина, из которой она выходит) и *конец* (вершина, в которую она входит). В соответствии с этим могут быть дуги, *выходящие* из вершины, и дуги, *входящие* в вершину. Поэтому вместо степени вершины в орграфе для вершины определяют *полустепень исхода* $d^-(x)$ как число дуг, исходящих из вершины, и *полустепень захода* $d^+(x)$ как число дуг, входящих в вершину. Подсчитать все дуги можно, если просуммировать все полустепени исхода или же просуммировать все полустепени захода. Из этого следует соотношение:

$$m = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i).$$

Еще несколько определений:

Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*.

Вершина графа, имеющая степень 1, называется *висячей*.

Граф называется *полным*, если любые 2 его вершины соединены ребром, и пустым, если все его вершины изолированы (множество ре-