МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Ю.С. Радченко

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Часть 2.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ, АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Воронеж

Издательский дом ВГУ

2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рекуррентное выражение для нахождения полиномов (1.6), (1.7)

$$H_{n+1}(z) - zH_n(z) + nH_{n-1}(z) = 0.$$

В выражении (1.5) использованы коэффициенты разложения вида

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_k(x) dx. \tag{1.8}$$

Если в (1.8) подставить (1.5), то получим

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{\kappa_3}{3!}, \quad c_4 = \frac{\kappa_4}{4!}, \quad c_5 = \frac{\kappa_5}{5!}, \tag{1.9}$$

$$c_6 = \frac{\kappa_6 + 10\kappa_3^2}{6!}, \quad c_7 = \frac{\kappa_7 + 35\kappa_4\kappa_3}{7!}.$$

Здесь κ_r – кумулянт порядка r распределения $f(x)$. Кумулянты получаются разложением в ряд Тейлора логарифма характеристической функции

$$\theta_f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-jux) dx,$$

$$\ln\left(\theta(u)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\kappa_r}{r!} (ju)^r.$$

Нетрудно получить

$$\kappa_1 = m_f, \kappa_2 = \mu_{2f}, \kappa_3 = \mu_{3f}, \kappa_4 = \mu_{4f} - 3\mu_{2f}^2.$$

В силу нормировки и центрирования $f(x)$ получаем $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1$.

Разложение (1.5) с учетом (1.7) и (1.9) называется ***разложение Грамма–Шарлье***. Эджворт путем перегруппировки слагаемых с высшими кумулянтами в разложении Грамма–Шарлье получил другой ряд, названный ***рядом Эджворта*** (1.10).

$$f(x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times\left[1 + \frac{\kappa_3}{3!} H_3(x) + \frac{\kappa_4}{4!} H_4(x) + \frac{10\kappa_3^2}{6!} H_6(x) + \frac{\kappa_5}{5!} H_5(x) + \frac{35\kappa_3\kappa_4}{5!} H_7(x)\right]. \tag{1.10}$$

Нетрудно увидеть, что

$\dfrac{\kappa_3}{3!} = \gamma_1$ – коэффициент асимметрии,

$\dfrac{\kappa_4}{4!} = \gamma_2$ – коэффициент эксцесса.

Перейдем теперь к распределению *ненормированной и нецентрированной* случайной величины ξ. Получаем преобразованную плотность вероятности

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_\xi} f\left(\frac{x - m_\xi}{\sigma_\xi}\right). \tag{1.11}$$

Таким образом***, ряд Эджворта*** для (1.11) имеет вид

$$W_\xi(x) = \frac{\exp\left(-(x-m_\xi)^2 / 2\sigma_\xi^2\right)}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} 1+\dfrac{\kappa_3}{3!}H_3\left(\dfrac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)+\dfrac{\kappa_4}{4!}H_4\left(\dfrac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)+ \\ +\dfrac{10\kappa_3^2}{6!}H_6\left(\dfrac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)+\dfrac{\kappa_5}{5!}H_5\left(\dfrac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)+\dfrac{35\kappa_3\kappa_4}{5!}H_7\left(\dfrac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \end{array}\right] \qquad (1.12)$$

Первые три слагаемых ряда Грамма–Шарлье (1.5) и Эджворта (1.10) совпадают. На практике этими слагаемыми в (1.12) ограничиваются.

ПРИМЕР. Получить разложение в ряд Эджворта распределение Максвелла
Решение.

$$W_\xi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 \exp\left(-x^2/2\right).$$

m1 := 1.596 μ2 := 0.454 g1 := 0.486 g2 := 0.10

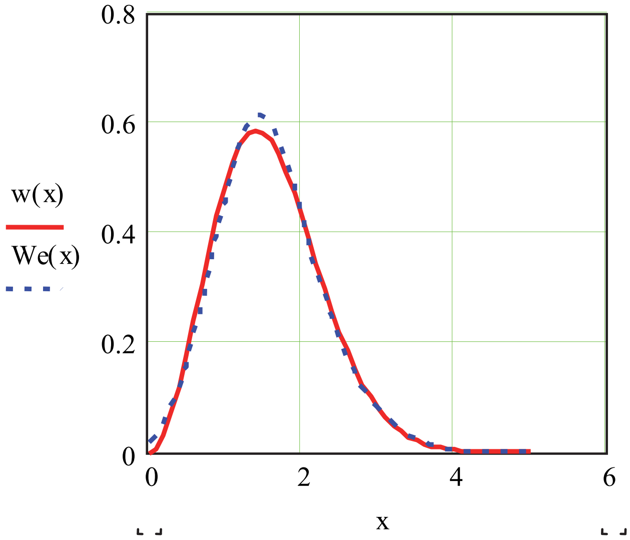


Рис. 1.2. Распределение Максвелла и его ряд Эджворта

1.3. Разложение по полиномам Лагерра

Если $\rho(x) = x^\alpha \exp(-x)$, $0 \le x < \infty$, то получается ряд **Лагерра** по полиномам Лагерра. В качестве опорного распределения берется ***гамма-распределение*** (с точностью до нормировочной константы). Полиномы Лагерра удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty z^\alpha e^{-x} L_k^{(\alpha)}(z) L_m^{(\alpha)}(z)\,dz = \delta_{km}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Первые четыре полинома Лагерра имеют вид:

$$L_0^{\alpha}(z)=1,\;\; L_1^{\alpha}(z)=(\alpha+1)-z,$$

$$L_2^{\alpha}(z)=0.5(\alpha+2)(\alpha+1)-(\alpha+2)z+0.5z^2 \qquad (1.13)$$

$$L_3^{\alpha}(z)=1/6(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)-1/2(\alpha+3)(\alpha+2)z+1/2(\alpha+3)z^2-1/6z^3.$$

Полиномы Лагерра связаны рекуррентным соотношением, по которому можно рассчитать любой полином

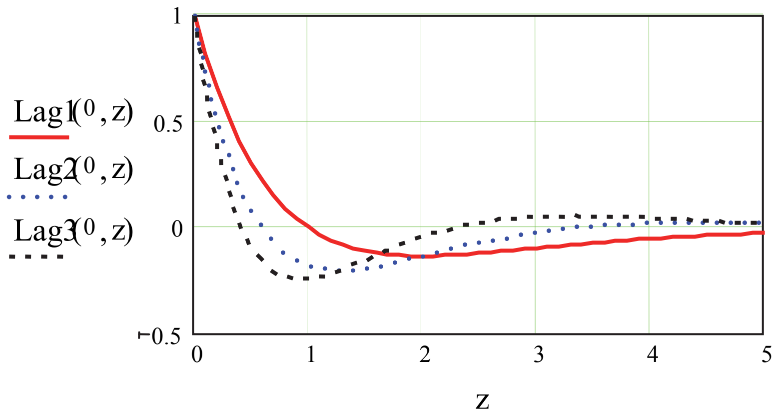
$$(m+1)L_{m+1}^{\alpha}(z)+(z-2m-1-\alpha)L_m^{\alpha}(z)+(\alpha+m)L_{m-1}^{\alpha}(z)=0.$$

Разложение нормированной случайной величины с плотностью вероятности $f(z),\ z\geq 0$ можно записать как

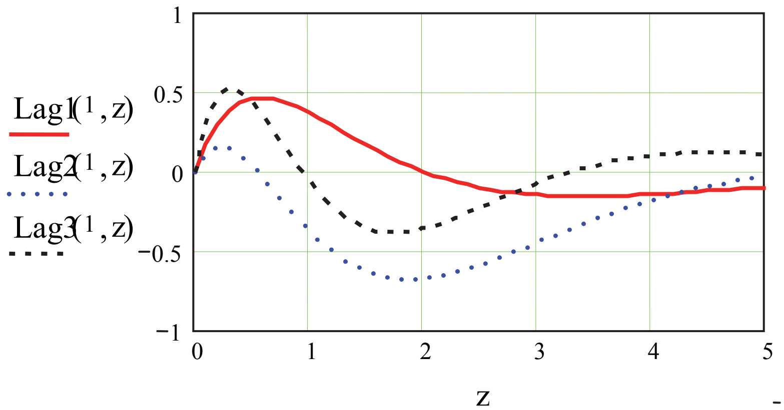
$$f(z)=z^{\alpha}e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k L_k^{(\alpha)}(z)\ ,\ \ z\geq 0 \qquad (1.14)$$

На рис.1.3 приведены графики некоторых функций Лагерра

$$Lag_k(\alpha,x)=x^{\alpha}e^{-x}L_k^{(\alpha)}(x).$$



α=0



α=1

Рис. 1.3. Графики функций Лагерра первых порядков

Коэффициенты разложения в (1.14) считаются по формуле

$$c_k = \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} \int_0^\infty f(z) L_k^{(\alpha)}(z)\,dx.$$

В теории вероятностей двухпараметрическое гамма-распределение имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad x \ge 0, \alpha > -1, \beta > 0 .$$

Для расчетов целесообразно ввести нормировку $z = x/\beta$. Тогда

$$W(x) = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Поэтому

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \sum_{k=0}^\infty d_k L_k^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right), \tag{1.15}$$

где

$$d_k = \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} \int_0^\infty W_\xi(x) L_k^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right) dx. \tag{1.16}$$

Константы α, β в (1.15), (1.16) целесообразно выразить через моменты

$$\alpha = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} - 1 = \frac{m_\xi^2}{\sigma_\xi^2} - 1,$$

$$\beta = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\sigma_\xi^2}{m_\xi}.$$

Тогда

$$d_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad d_1 = d_2 = 0, \quad d_3 = \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+4)}\left(2 - \frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa_2^2}\right), \tag{1.17}$$

$$d_4 = \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+5)}\left(18 - \frac{12\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2^2} + \frac{\kappa_4\kappa_1^2}{\kappa_2^3}\right),$$

$$d_5 = \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+6)}\left(144 - \frac{120\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2^2} + \frac{20\kappa_4\kappa_1^2}{\kappa_2^3} - \frac{\kappa_5\kappa_1^3}{\kappa_2^4}\right).$$

ŋqdqyeY bɆ dedⱣbYɜe d ɛɑɑbɔɣ ɹqdqYqyè

ПРИМЕР Получить разложение в ряд Лагерра распределения Максвелла.

Решение: $W_{\xi}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,x^2\exp\left(-x^2/2\right)$.

$m_1=1.596,\ \ m_2=3,\ \ \ m_3=6.383,$

$\mu_2=0.453,\ \ \ \alpha=4.626,\ \ \ \beta=0.284.$

Из выражений (1.17) следует:

$$d_0=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}=0.016;$$

$$d_3=\frac{1}{\Gamma(\alpha+4)}\left[\frac{m_2}{\beta^2}(\alpha+3)-\frac{m_3}{\beta^3}\right]=2.57\cdot10^{-4}.$$

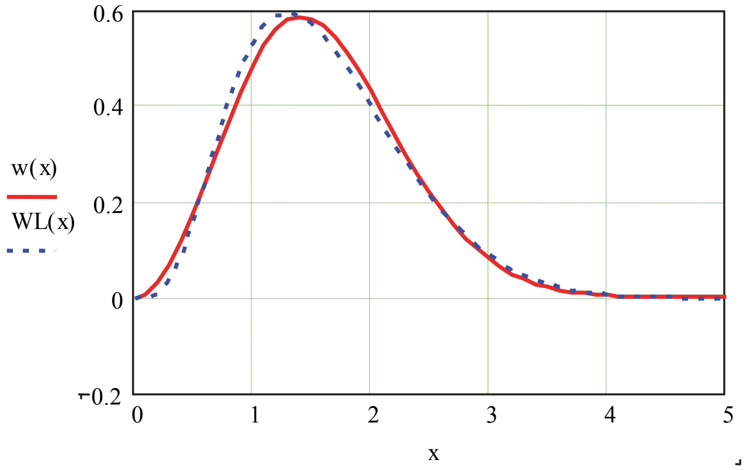


Рис.1.4. Распределение Максвелла и его ряд Лагерра

Пример. Анализ отличий двух кадров изображений

Для определения отличий изображений можно применять решающие правила,

$$D_0=\frac{\sum\limits_{k,m}(X_{k,m}-C^{(1)}_{k,m})^2}{(C^{(1)}_{0,0})^2}\gtrless h_0\ \text{ или }\ D_E=\frac{\sum\limits_{k,m}(X_{k,m}-C^{(1)}_{k,m})^2}{\sum\limits_{k,m}(C^{(1)}_{k,m})^2}\gtrless h_E. \qquad (1.18)$$

Здесь $C^{(1)}_{k,m}$ – спектр опорного изображения, $X_{k,m}$ – спектр текущего кадра.

Решающие статистики (1.18) в общем случае будут подчиняться распределению, которое можно аппроксимировать рядом Лагерра.